Kolorowanie płaszczyzny, prostych i okręgów

Jadwiga Czyżewska
Pisane pod kierunkiem W.Guzickiego

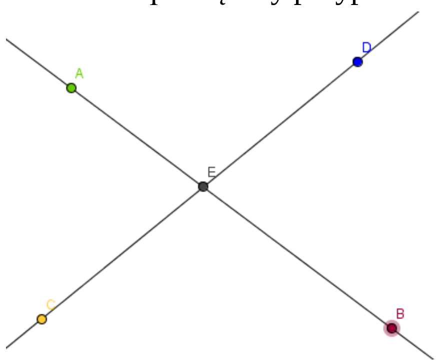
W 2013 roku na II etapie VIII edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów pojawiło się zadanie o następującej treści:

Zadanie 1: *„Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij."*

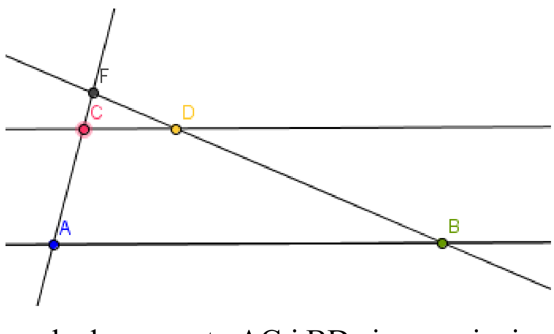
Pokażę, że zgodnie z warunkami zadania, płaszczyznę możne pokolorować co najwyżej trzema kolorami.

Udowodnię najpierw, że nie można pokolorować punktów płaszczyzny czterema kolorami.

Załóżmy, że można pokolorować płaszczyznę czterema kolorami zgodnie z warunkami zadania. Weźmy 4 punkty A, B, C, D, które są pokolorowane na cztery różne kolory. Zauważmy, że żadne trzy z tych punktów nie mogą być współliniowe, bo wtedy przechodząca przez nie prosta byłaby trzykolorowa. Rozpatrzę trzy przypadki:

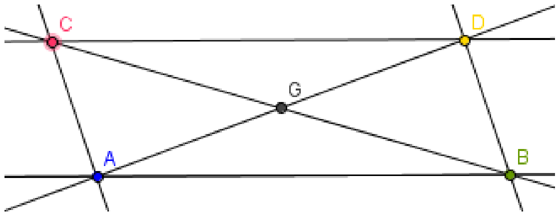


1. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E. Jeżeli punkt E jest pokolorowany na kolor punktu A lub B, to prosta CD jest trzykolorowa. Jeśli jest pokolorowany na kolor punktu C lub D, to prosta AB jest trzykolorowa.



2. Proste AB i CD są równoległe, a proste AC i BD się przecinają w punkcie F. Jeśli punkt F jest pokolorowany na kolor punktu A lub C, to prosta BD jest trzykolorowa. Jeśli punkt F

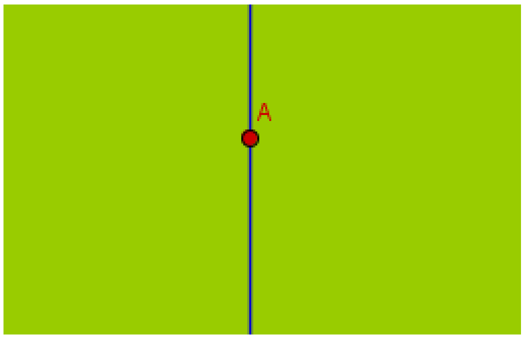
jest pokolorowany na kolor punktu B lub D, to prosta AC jest trzykolorowa.



3. Proste AB i CD są równoległe oraz proste AC i BD są równoległe. Wtedy czworokąt ABDC jest równoległobokiem. Niech jego przekątne AD i BC przecinają się w punkcie G. Jeśli punkt G jest pokolorowany na kolor punktu A lub D, to prosta BC jest trzykolorowa. Jeżeli jest pokolorowany na kolor punktu C lub B, to prosta AD jest trzykolorowa.

Stąd nie można pokolorować płaszczyzny czterema kolorami, tak aby każda prosta była co najwyżej trzykolorowa.

Pokażę kolorowanie płaszczyzny trzema kolorami, przy którym każda prosta jest co najwyżej dwukolorowa. Pokolorujmy całą płaszczyznę na jeden kolor, np. zielony. Wybierzmy prostą i pokolorujmy ją na inny kolor, np. niebieski. Wybierzmy teraz dowolny punkt na tej prostej i pokolorujmy go na inny kolor, np. czerwony.



Wtedy każda prosta jest jedno lub dwukolorowa. To kończy rozwiązanie zadania 1.

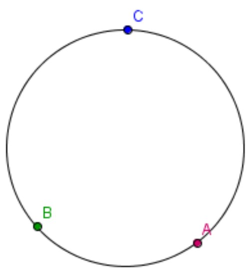
Rozpatrzmy teraz analogiczne zadanie dla okręgów:

Zadanie 2: *„Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każdy okrąg był jednokolorowy lub dwukolorowy. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?”*

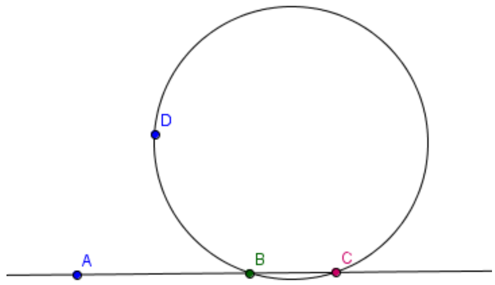
Pokażę, że zgodnie z warunkami zadania płaszczyznę można pokolorować co najwyżej dwoma kolorami.

Udowodnię najpierw, że nie można pokolorować płaszczyzny trzema kolorami.

Załóżmy, że można pokolorować płaszczyznę 3 kolorami, tak, by każdy okrąg był co najwyżej dwukolowy. Wybierzmy trzy różnokolorowe punkty A, B i C. Rozpatrzę dwa przypadki:



1. Punkty A, B i C nie są współliniowe. Wtedy można poprowadzić przez nie okrąg, który będzie trzykolorowy.



2. Punkty A, B i C są współliniowe. Weźmy dowolny punkt D, który nie leży na prostej ABC. Punkt D ma taki sam kolor jak jeden z punktów A, B oraz C – bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkty A i D mają taki sam kolor. Wtedy przez punkty B, C, D mogę poprowadzić okrąg, który będzie trzykolorowy.

Rozpatrzyłam oba przypadki i w każdym pokazałam, że istnieje trzykolorowy okrąg, co jest sprzeczne z założeniem.

Pokażę kolorowanie płaszczyzny dwoma kolorami, dla którego każdy okrąg jest co najwyżej dwukolorowy. Zauważmy, że jeśli pokolorujemy punkty płaszczyzny dwoma kolorami, to każdy okrąg będzie co najwyżej dwukolorowy. To kończy rozwiązanie zadania 2.

Przyjmijmy następującą definicję:

Definicja:

Kolorowaniem płaszczyzny k kolorami nazywamy funkcję przyporządkowującą każdemu punktowi jeden z k kolorów.

(m, n)-kolorowaniem nazywamy takie kolorowanie, przy którym każda prosta jest co najwyżej n kolorowa, a każdy okrąg jest co najwyżej m kolorowy.

(m, ∞)-kolorowaniem nazywamy takie kolorowanie płaszczyzny, przy którym każda prosta jest co najwyżej m kolorowa, a każdy okrąg jest pokolorowany na dowolną liczbę kolorów.

(∞, n)-kolorowaniem nazywamy takie kolorowanie płaszczyzny, przy którym każda prosta jest pokolorowana na dowolną liczbę kolorów, a każdy okrąg jest co najwyżej n kolorowy.

Zdefiniujmy taką funkcje K, że:

K(m, n)=k wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (m, n)-kolorowanie płaszczyzny za pomocą k kolorów i nie istnieje (m, n)-kolorowanie płaszczyzny za pomocą k+1 kolorów.

Ponadto niech:

- K(m, ∞)=k oznacza, że istnieje (m, ∞)-kolorowanie płaszczyzny za pomocą k kolorów i nie istnieje (m, ∞)-kolorowanie płaszczyzny za pomocą k+1 kolorów.
- K(∞, n)=k oznacza, że istnieje (∞, n)-kolorowanie płaszczyzny za pomocą k kolorów i nie istnieje (∞, n)-kolorowanie płaszczyzny za pomocą k+1 kolorów.
- K(m, n)= ∞ oznacza, że istnieje (m, n)-kolorowanie płaszczyzny za pomocą nieskończonej liczby kolorów.
- K(m, ∞)=∞ oznacza, że istnieje (m, ∞)-kolorowanie płaszczyzny za pomocą nieskończonej liczby kolorów.
- K(∞, n)= ∞ oznacza, że istnieje (∞, n)-kolorowanie płaszczyzny za pomocą nieskończonej liczby kolorów.

Twierdzenie 1: K (1, ∞)=1.

Zauważmy, że jeśli płaszczyzna jest pokolorowana jednym kolorem, to każda prosta jest jednokolorowa.

Załóżmy, że istnieje (1, ∞)-kolorowanie płaszczyzny dwoma kolorami. Wybierzmy różnokolorowe punkty A i B. Wtedy prosta AB jest dwukolorowa, co jest sprzeczne z założeniem. Stąd wynika, że K(1, ∞) =1.

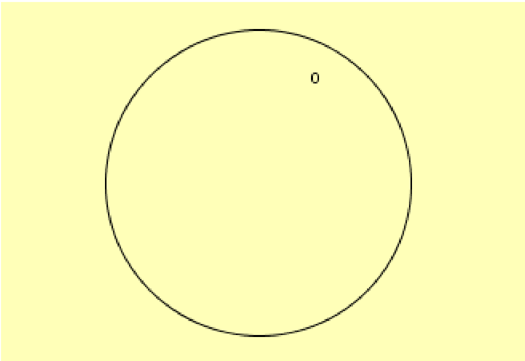
Twierdzenie 2: K (∞, 1)=1.

Zauważmy, że jeśli płaszczyznę pokolorujemy jednym kolorem, każdy okrąg jest jednokolorowy.

Załóżmy, że istnieje (∞, 1)-kolorowanie płaszczyzny dwoma kolorami. Wybierzmy dwa różnokolorowe punkty i przeprowadzamy przez nie okrąg. Będzie on dwukolorowy, co jest sprzeczne z założeniem. Stąd wynika, że K(∞,1)=1.

Twierdzenie 3: K (3, ∞)=∞.

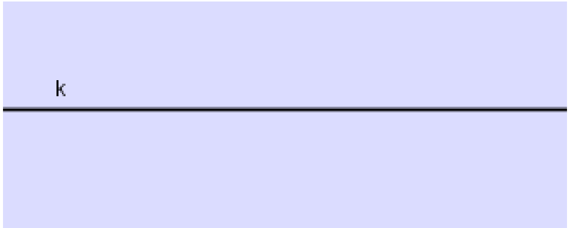
Pokolorujmy całą płaszczyznę na jeden kolor. Wybierzmy okrąg o i każdy jego punkt pokolorujmy na inny kolor.



Jeżeli prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem o, to jest jednokolorowa. Jeśli jest styczna do okręgu o, to jest dwukolorowa, a jeśli go przecina w dwóch punktach jest trzykolorowa. Stąd wynika, że K(3, ∞)=∞.

Twierdzenie 4: K(∞, 3)= ∞.

Pomalujmy całą płaszczyznę na jeden kolor. Wybierzmy prostą k i pokolorujmy każdy jej punkt na inny kolor.



Jeżeli okrąg nie ma punktów wspólnych z prostą k, to jest jednokolorowy. Jeżeli jest do niej styczny, to jest dwukolorowy, a jeżeli przecina prostą k w dwóch punktach , to jest trzykolorowy. Stad wynika, że $K(\infty, 3)= \infty$.

Rozszerzmy teraz problem i zastanówmy się nad sytuacją, w której mamy ograniczenie zarówno dla prostych jak i dla okręgów. Najpierw jednak przedstawię twierdzenie ogólne:

Twierdzenie 5: Jeśli $m \leq m_1$ i $n \leq n_1$ to $K(m, n) \leq K(m_1, n_1)$

Niech $K(m, n)=k$. Rozważmy kolorowanie płaszczyzny k kolorami, będące (m, n)-kolorowaniem. Wtedy każda prosta jest co najwyżej m kolorowa, a każdy okrąg co najwyżej n kolorowy. Kolorowanie płaszczyzny jest więc (m_1, n_1)-kolorowaniem, bo $m \leq m_1$ i $n \leq n_1$. Stąd $K(m, n) \leq K(m_1, n_1)$.

Wniosek 6:

- Jeśli $m \geq 3$, to $K(m, \infty)=\infty$
- Jeśli $n \geq 3$, $K(\infty, n) =\infty$

Twierdzenie 7: $K(m,2)=2$ dla $m \geq 2$

Na podstawie zadania 2 $K(\infty, 2)=2$. Zauważmy, że $m \leq \infty$, więc zgodnie z twierdzeniem 5, $K(m, 2) \leq K(\infty,2)$, czyli $K(m, 2) \leq 2$. Zauważmy, że jeśli pokolorujemy płaszczyznę dwoma kolorami, każda prosta i każdy okrąg będą co najwyżej dwukolorowe. Stąd $K(m, 2)=2$.

Twierdzenie 8: $K(2, n)=3$ dla $n \geq 3$

Na podstawie zadania 1 $K(2, \infty)=3$. Zauważmy, że $n \leq \infty$, więc zgodnie z twierdzeniem 5, $K(2, n) \leq K(2, \infty)$, czyli $K(2, n) \leq 3$. Pokolorujmy płaszczyznę na jeden kolor, np. zielony. Wybierzmy prostą a i pokolorujmy ją na czarno. Na prostej a wybierzmy punkt X i pokolorujmy go na inny kolor, np. pomarańczowy. Wtedy każda prosta jest co najwyżej dwukolorowa, a każdy okrąg jest co najwyżej trzykolorowy, stąd $K(2, n)=3$.

Twierdzenie 9: $K (2, 2)=2$.

Na podstawie twierdzenia 5 $K(2, 2) \leq K(m, 2)$ dla $m \geq 2$, więc zgodnie z twierdzeniem 7, $K(2, 2,) \leq 2$. Zauważmy, że jeśli pokolorujemy płaszczyznę dwoma kolorami, każda prosta i każdy okrąg są co najwyżej dwukolorowe. Stąd $K(2, 2)=2$.

Udowodnię teraz następujący lemat:

Lemat 10: Istnieje nieskończony zbiór punktów X, taki, że żadne trzy punkty, należące do zbioru X nie są współliniowe i żadne cztery nie leżą na jednym okręgu.

Zdefiniuję przez indukcję ciąg zbiorów $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$, które spełniają następujące warunki:

1) $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots$

2) dla każdego n żadne trzy punkty należące do zbioru X_n nie są współliniowe
3) dla każdego n żadne cztery punkty należące do zbioru X_n nie leżą na jednym okręgu
4) zbiór X_n zawiera n+3 punkty.

Zbiór X_1 zawiera 4 punkty: wierzchołki dowolnego trójkąta i jego środek ciężkości. Zauważmy, że wtedy zbiór X_1 spełnia warunek drugi, bo żadne trzy punkty nie są współliniowe, trzeci, bo żadne 4 punkty nie leżą na jednym okręgu oraz czwarty, ponieważ zawiera cztery punkty. Gdy mamy zbiór X_n, tworzymy zbiór X_{n+1} następująco: przez każde dwa różne punkty zbioru prowadzę prostą, a przez każde trzy różne punkty zbioru okrąg. Zauważmy, że liczba prostych i okręgów jest skończona (liczba prostych wynosi $\binom{n}{2}$, a liczba okręgów $\binom{n}{3}$).

Teraz dowiodę, że skończona liczba prostych i okręgów nie może pokryć całej płaszczyzny. Mianowicie: załóżmy, że skończona liczba prostych i okręgów (niech tworzą razem zbiór Z) może pokryć całą płaszczyznę. Weźmy prostą a, która nie należy do zbioru Z. Każda prosta należąca do zbioru Z przecina ją w co najwyżej jednym punkcie, a każdy okrąg należący zbioru Z w co najwyżej dwóch. Stąd proste i okręgi należące do zbioru Z przecinają ją w skończonej ilości punktów. Prosta a zawiera nieskończenie wiele punktów, więc możemy wybrać punkt, który nie należy do żadnej prostej ani żadnego okręgu, należącego do zbioru Z. Jest to sprzeczne z założeniem, ponieważ wybrane proste i okręgi nie pokryją całej płaszczyzny.

Wybieram punkt P, który nie należy do żadnej poprowadzonej wcześniej prostej i żadnego poprowadzonego wcześniej okręgu. Niech zbiór X_{n+1}definiujemy następująco $X_n \cup \{P\}$

Weźmy sumę wszystkich uzyskanych w ten sposób zbiorów punktów. Niech będzie to zbiór X. Zauważmy, że zbiór X zawiera nieskończenie wiele elementów.

Załóżmy, że w zbiorze X są trzy współliniowe punkty A, B, C. Niech $A \in X_p$, $B \in X_r$, $C \in X_s$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p \leq r \leq s$. Wtedy A, B, C $\in X_s$, więc zgodnie z założeniami o zbiorze X_s, punkty A, B oraz C nie są współliniowe, co jest sprzeczne z założeniem. Stąd w zbiorze X nie istnieją trzy współliniowe punkty.

Załóżmy, że w zbiorze X są cztery punkty A, B, C oraz D, które leżą na jednym okręgu. Niech $A \in X_p$, $B \in X_r$, $C \in X_s$, $D \in X_t$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p \leq r \leq s \leq t$. Wtedy A, B, C, D $\in X_t$, więc zgodnie z założeniami o zbiorze X_t punkty A, B, C i D nie leżą na jednym okręgu, co jest sprzeczne z założeniem. Stąd w zbiorze X nie istnieją cztery punkty leżące na jednym okręgu.

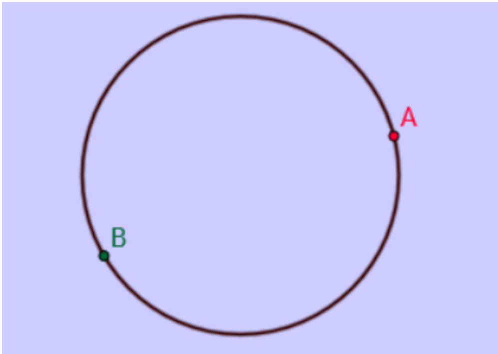
Zbiór X jest zbiorem o nieskończonej liczbie elementów. Żadne trzy punkty należące do zbioru X nie są współliniowe, a żadne cztery nie leżą na jednym okręgu.

<u>Twierdzenie 11:</u> $K(3, 4)= \infty$.

Pokolorujmy całą płaszczyznę jednym kolorem. Weźmy nieskończony zbiór Z punktów, taki, że żadne trzy punkty do niego należące nie są współliniowe i żadne cztery nie leżą na jednym okręgu. Każdy punkt należący do zbioru Z pokolorujmy innym kolorem. Zauważmy, że każda prosta jest jednokolorowa (jeśli nie zawiera żadnego punktu należącego do zbioru Z), dwukolorowa (jeżeli zawiera tylko jeden taki punkt) lub trzykolorowa (jeśli zawiera dokładnie dwa punkty należące do zbioru Z). Analogicznie każdy okrąg jest maksymalnie czterokolorowy: jeżeli nie zawiera żadnego punktu należącego do zbioru Z, jest jednokolorowy, jeżeli zawiera jeden punkt należący do zbioru Z, jest dwukolorowy, jeżeli zawiera dwa punkty, jest trzykolorowy, a jeżeli zawiera trzy punkty należące do zbioru Z jest czterokolorowy. Stąd wynika, że $K(3, 4)= \infty$.

<u>Twierdzenie 12:</u> $K(3, 3)\geq 4$.

Pokolorujmy całą płaszczyznę na jeden kolor, np. fioletowy. Wybierzmy okrąg o leżący na tej płaszczyźnie i pokolorujmy go na inny kolor, np. czarny. Wybierzmy dwa punkty na okręgu o i pokolorujmy je na dwa kolory różne od pozostałych, np. czerwony i zielony.



Każde dwa różne okręgi mają co najwyżej dwa punkty wspólne oraz każdy okrąg i prosta mają co najwyżej dwa punkty wspólne. Jeśli prosta nie ma wspólnych punktów z okręgiem o, to jest jednokolorowa. Jeśli jest do niego styczna, jest dwukolorowa. Jeżeli przecina go w dwóch punktach, to jest dwu- lub trzykolorowa. Analogicznie jest dla okręgów: jeżeli okrąg nie ma punktów wspólnych z okręgiem o, jest jednokolorowy, jeżeli jest do niego styczny, jest dwukolorowy, a jeżeli go przecina, jest dwu- lub trzykolorowy.

<u>Twierdzenie 13:</u> $K(3, 3)<6$.

Załóżmy że istnieje (3, 3)-kolorowanie za pomocą 6 kolorów. Możemy wtedy wybrać 6 różnokolorowych punktów - oznaczmy je jako A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 oraz A_6. Pokażę, że można wybrać prostą przechodzącą przez 2 lub 3 wybrane przeze mnie punkty, a pozostałe wybrane punkty będą leżeć po jednej stronie tej prostej.

Umieśćmy wybrane punkty w układzie współrzędnych. Niech $A_1=(x_1, y_1)$, $A_2=(x_2, y_2)$, … , $A_6=(x_6, y_6)$. Niech x będzie równe największej z liczb $x_1, x_2, \dots, x_6$. Rozpatrzmy trzy przypadki:

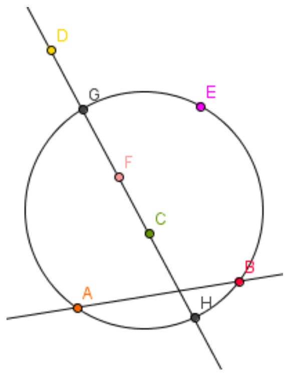
1. istnieje dokładnie jeden punkt, taki że $x_i=x$. Oznaczmy go jako A. Poprowadźmy przez ten punkt prostą prostopadłą do osi x i obróćmy ją ruchem przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wokół punktu A, aż prosta przejdzie przez jakikolwiek inny wybrany punkt. Rozpatrzę dwa przypadki:
   a) prosta przejdzie przez dokładnie dwa wybrane punkty (licząc z punktem A). Oznaczam drugi punkt jako B. Wszystkie pozostałe punkty leżą po jednej stronie prostej AB. Stąd prosta AB jest szukaną przez nas prostą.
   b) Prosta przechodzi przez trzy lub więcej wybranych punktów. Zauważmy, że jednak prosta nie może przechodzić przez więcej niż trzy wybrane punkty, bo byłaby wtedy co najmniej czterokolorowa. Prosta ta jest więc szukaną przez nas prostą.

2) istnieją dokładnie dwa punkty, takie że $x_i=x$ i $x_j=x$ Znaleźliśmy prostą, która przechodzi przez dwa punkty, a pozostałe wybrane przez nas punkty leżą po jej jednej stronie.

3) istnieją trzy lub więcej wybrane punkty, leżące na wybranej prostej. Zauważmy, że gdyby na prostej leżały więcej niż trzy wybrane punkty, prosta byłaby co najmniej czterokolorowa, przez co kolorowanie nie byłoby (3, 3)-kolorowaniem. Wybrana przez nas prosta jest szukaną prostą.

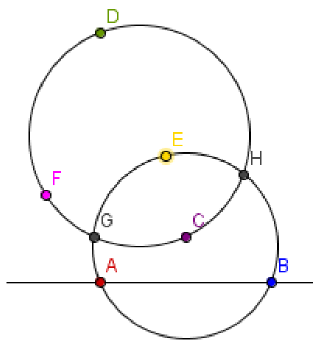
Pokazałam jak można wybrać prostą, na której leżą 2 lub 3 wybrane punkty. Rozpatrzę teraz dwa przypadki:

1. Prosta przechodzi przez dokładnie 2 wybrane przeze mnie punkty – oznaczmy je jako A i B. Pozostałe punkty oznaczam jako P_1, P_2, P_3 i P_4. Rozważmy kąty AP_1B, AP_2B, AP_3B i AP_4B. Jeżeli którekolwiek dwa mają takie same miary, np. AP_nB i AP_mB, to na punktach A, B, P_n i P_m można opisać okrąg, który będzie czterokolorowy. Spośród kątów wybieram kąt o maksymalnej mierze - AP_iB. Spośród pozostałych kątów wybierzmy kąt o minimalnej mierze – AP_jB Punkt P_i oznaczam jako C, a P_j jako D. Pozostałe punkty oznaczam jako E i F. Wtedy punkt C leży wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie ABE. Rozpatrzę dwa przypadki:
   - Punkty C, D i F są współliniowe. Punkty przecięcia prostej CEF i okręgu ABE oznaczam jako G i H.



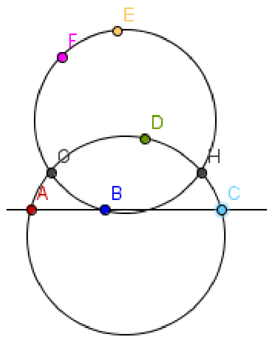
Jeżeli punkt G jest w pokolorowany na taki sam kolor co punkt A, B lub E, to prosta CDF jest czterokolorowa. Jeśli punkt G jest pokolorowany na taki sam kolor co punkt C, D lub F, to okrąg ABE jest czterokolorowy.

   - Punkty C, D i F nie są współliniowe. Punkty przecięcia okręgów opisanych na trójkątach ABE i CDF oznaczam jako G i H.



Jeżeli punkt G jest pokolorowany na taki sam kolor co punkt A, B lub E, to okrąg CDF jest czterokolorowy. Jeżeli punkt G jest pokolorowany na taki sam kolor co punkt C, D lub F, to okrąg ABE jest czterokolorowy.

2. Prosta przechodzi przez dokładnie 3 wybrane przeze mnie punkty. Oznaczam je jako A, B i C- niech leżą na prostej w tej właśnie kolejności. Pozostałe punkty oznaczam jako L_1, L_2 i L_3. Rozważmy kąty AL_1C, AL_2C i AL_3C. Jeżeli którekolwiek dwa z nich mają równą miarę – bez straty ogólności możemy przyjąć, że kąty AL_1Ci AL_2C są równe – to na punktach A, C, L_1, L_2 możemy opisać okrąg, który będzie czterokolorowy. Spośród kątów wybierzmy ten o maksymalnej mierze – AL_iC. Punkt L_i oznaczam jako D, a pozostałe punkty jako E i F. Wtedy punkt B leży wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie ACD. Punkty przecięcia okręgów opisanych na trójkątach ACD i BEF oznaczam jako G i H.



Jeżeli punkt G jest pokolorowany na taki sam kolor co punkt A, C lub D, to okrąg BEF jest czterokolorowy. Jeżeli punkt G jest pokolorowany na taki sam kolor co punkt B, E lub F, to okrąg ACD jest czterokolorowy.

Rozpatrzyliśmy wszystkie możliwe przypadki. We wszystkich doszliśmy do sprzeczności, stąd nie istnieje kolorowanie płaszczyzny sześcioma kolorami będące (3,3)-kolorowaniem

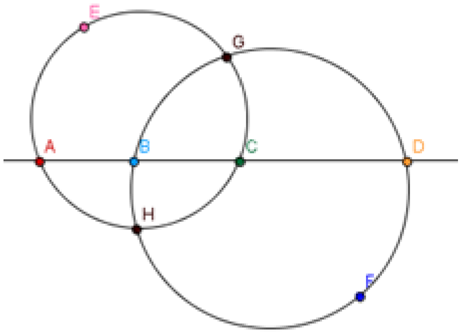
Nie potrafię stwierdzić czy istnieje (3, 3)-kolorowanie, wykorzystujące 5 kolorów. Stąd K(3,3) =4 lub K(3, 3)=5.

Zastanówmy się nad (4, 3)-kolorowaniem:

<u>Twierdzenie 14: </u>K (4, 3)<6.

Załóżmy, że istnieje (4, 3)-kolorowanie, wykorzystujące sześć kolorów. Zauważmy, że gdyby takie kolorowanie płaszczyzny istniało, moglibyśmy wybrać czterokolorową prostą.

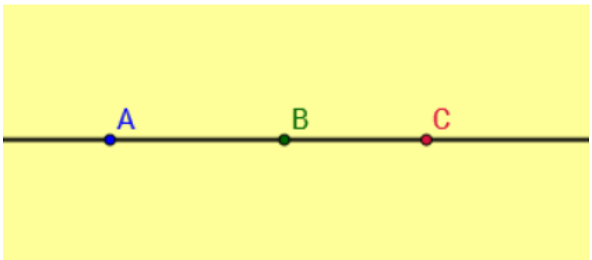
Gdyby tak nie było, kolorowanie płaszczyzny byłoby (3, 3)-kolorowaniem, w którym jak wiemy z twierdzenia 13 nie istnieje kolorowanie sześcioma kolorami. Wybieram więc czterokolorową prostą i 4 różnokolorowe punkty A, B, C i D - niech leżą na prostej w tej właśnie kolejności. Wybieram dwa punkty E i F, takie, żadne dwa z punktów A, B, C, D, E i F nie mają tego samego koloru. Zauważmy, że żaden z punktów E i F nie może leżeć na prostej ABCD, bo w takim przypadku prosta byłaby co najmniej pięciokolorowa. Punkt B leży wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie AEC, który oznaczam jako o_1. Okrąg opisany na trójkącie BFD oznaczam jako o_2.. Wtedy o_1 i o_2 przecinają się w dwóch punktach G i H.



Punkty przecięcia, ponieważ leżą na o_1, muszą być w kolorach punktów A, C i E. Jednak leżą także na o_2, więc muszą być w kolorach punktów B, D i F, co jest sprzecznością. Stąd nie istnieje kolorowanie płaszczyzny 6 kolorami będące (4, 3)-kolorowaniem.

<u>Twierdzenie 15:</u> K(4, 3)≥5.

Pokażę kolorowanie płaszczyzny, wykorzystujące pięć kolorów, takie, że którego każda prosta jest co najwyżej czterokolorowa i każdy okrąg jest co najwyżej trzykolorowy. Pokolorujmy całą płaszczyznę na jeden kolor, np. żółty. Wybierzmy jedną prostą i pomalujmy ją na drugi kolor, np. czarny. Na prostej wybierzmy trzy punkty leżące na tej prostej pokolorujmy je na trzy różne kolory np. niebieski, zielony i czerwony.



Ponieważ każdy okrąg może mieć z prostą co najwyżej dwa punkty wspólne, więc każdy okrąg maksymalnie trzykolorowy. Każda prosta jest co najwyżej czterokolorowa.

<u>Wniosek 16:</u> K(4, 3)=5.

<u>Twierdzenie 17:</u> K(m, 3)=m+1 dla m≥4.

Udowodnię tezę przez indukcję. Dla m=4 jest ona spełniona na mocy wniosku 16. Udowodnię, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla m, to jest prawdziwe także dla m+1. Najpierw pokażę, że nie można pokolorować płaszczyzny m+2 kolorami, a następnie pokażę kolorowanie płaszczyzny m+1 kolorami, będące (m, 3)-kolorowaniem.

Załóżmy, że mogę pokolorować płaszczyznę m+2 kolorami, aby kolorowanie było (m, 3)-kolorowaniem. Wtedy mogłabym wybrać m kolorową prostą k. Gdyby nie można było tego zrobić, kolorowanie byłoby (m-1, 3)-kolorowaniem , dla którego jak wykazaliśmy wcześniej maksymalną liczbą kolorów, jaką możemy użyć jest (m-1)+1=m kolorów.
Na prostej k wybieram 4 różnokolorowe punkty A, B, C, D, które leżą na tej prostej k w tej właśnie kolejności. Wybieram dwa różnokolorowe punkty E i F, tak by punkty A, B, C, D, E i F miały parami różne kolory. Wtedy okręgi opisane na trójkątach AEC i BDF przecinają się – punkty przecięcia oznaczam jako G i H. Jeżeli punkt G jest w kolorze punktu A, E lub C, to okrąg BDF jest czterokolorowy. Jeżeli punkt G jest w kolorze punktu B, D lub F, to okrąg AEC jest czterokolorowy. Nie istnieje więc (m, 3)–kolorowanie m+2 kolorami.

Pokażę teraz (m, 3)-kolorowanie płaszczyzny m+1 kolorami. Pokolorujmy całą płaszczyznę na jeden kolor. Wybierzmy jedna prostą i pokolorujmy ją na inny kolor . Następnie na prostej wybieram m-1 punktów i każdy koloruje na inny kolor (tak by punkty, prosta i płaszczyzna miały różne kolory).Wtedy każda prosta jest co najwyżej m kolorowa. Każdy okrąg jest jednokolorowy, gdy nie ma punktów wspólnych z wybrana prosta, dwukolorowy, gdy jest do niej styczny i dwu- lub- trzykolorowy , gdy przecina ją w dwóch punktach.

Stąd K(m, 3)=m+1.

Podsumowanie*:*

W poniższej tabeli zamieszczone są wyniki dla poszczególnych wartości *m* i *n*.

n \ m	1	2	3	4	5	6	…
1	1	1	1	1	1	1	…
2	1	2	3	3	3	3	…
3	1	2	4 lub 5	∞	∞	∞	…
4	1	2	5	∞	∞	∞	…
5	1	2	6	∞	∞	∞	…
6	1	2	7	∞	∞	∞	…
…	…	…	m+1	…	…	…	…