Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 6
wrzesień 2012

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Do siego roku (szkolnego)!

Minął już (jak zwykle zbyt prędko) słodki okres wakacyjnej laby i beztroski. W nowym roku szkolnym życzymy uczniom wytrwałości w realizacji swoich szkolnych planów i zamierzeń, a nauczycielom cierpliwości w niesieniu swoim podopiecznym kaganka oświaty, który to kaganek nie zawsze jest chętnie przyjmowany.

Przypominamy również o rozpoczynającej się właśnie VIII edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Mamy nadzieję, że lektura naszej gazetki będzie zachętą do udziału w zawodach oraz pomocą w przygotowaniach do matematycznych zmagań.

Redakcja

Szufladki i reszty z dzielenia

Zasada szufladkowa Dirichleta głosi, że *jeśli umieszczamy przedmioty w szufladkach i dysponujemy większą liczbą przedmiotów, niż szufladek, to w pewnej szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.* Tę bardzo naturalną obserwację można zastosować m.in. do wielu zadań dotyczących reszt z dzielenia.

Zadanie 1.

Wykaż, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych znajdą się dwie, których cyfry jedności są równe.

Rozwiązanie

Mamy 10 możliwych cyfr jedności (od 0 do 9), niech to będą nasze szufladki. Rozmieszczamy w nich 11 danych liczb. Wówczas, z zasady szufladkowej Dirichleta, do pewnej szufladki trafią przynajmniej dwie liczby, a to właśnie było do udowodnienia.

Zamiast mówić o cyfrach jedności, można sformułować to samo zadanie w nieco inny sposób:

Zadanie 1'.

Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych znajdą się dwie, które dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 10.

Korzyścią z takiego przeformułowania jest możliwość uogólnienia naszego rozwiązania także na reszty z dzielenia przez inne liczby. W tym celu warto zauważyć, że *przy dzieleniu przez dodatnią liczbę całkowitą n, jest n możliwych reszt:* $0,1,2,\ldots,n-1$.

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, wśród dowolnie wybranych $n+1$ liczb naturalnych znajdą się dwie, które dają tę samą resztę przy dzieleniu przez n.

Rozwiązanie

Mamy n możliwych reszt z dzielenia przez n (od 0 do $n-1$), niech to będą nasze szufladki. Rozmieszczamy w nich $n+1$ danych liczb. Zatem w którejś szufladce znajdą się co najmniej dwie liczby, co kończy dowód.

Jeśli mamy dane liczby całkowite a i b, przy czym $a \geqslant b$, oraz dodatnią liczbę całkowitą n, to warunek, iż

- *liczby a i b dają tę samą resztę przy dzieleniu przez n*

równoważny jest warunkowi, że

- *różnica $a-b$ dzieli się przez n.*

Z pierwszego warunku wynika drugi, ponieważ jeśli $a=kn+r$ oraz $b=ln+r$ dla pewnych liczb całkowitych k, l, r, przy czym $0 \leqslant r \leqslant n-1$, to liczba $a-b=(k-l)n$ dzieli się przez n.

Także na odwrót, z drugiego warunku wynika pierwszy, bo jeżeli $a-b=mn$ oraz $b=ln+r$ dla pewnych liczb całkowitych m, l, r, przy czym $0 \leqslant r \leqslant n-1$, to $a=(m+l)n+r$, czyli a daje tę samą resztę przy dzieleniu przez n, co b.

Zadanie 3.

Dany jest pewien zbiór 2012 liczb naturalnych. Wykaż, że można z tego zbioru wybrać takie trzy liczby a, b, c, aby liczba $(a-b)c$ była podzielna przez 2012.

Rozwiązanie

Każda z danych 2012 liczb daje przy dzieleniu przez 2012 jedną z 2012 możliwych reszt.

Jeśli istnieje w danym zbiorze liczba, która daje resztę 0, czyli dzieli się przez 2012, to wybierzmy tę właśnie liczbę jako c oraz dowolne inne liczby jako a i b. Wówczas iloczyn $(a-b)c$ jest podzielny przez 2012, ponieważ czynnik c jest podzielny przez 2012.

Jeżeli z kolei żadna z danych liczb nie daje reszty 0, to każda daje jedną z 2011 niezerowych reszt (od 1 do 2011). Skoro liczb jest 2012, to pewne dwie spośród nich dają tę samą resztę, nazwijmy te liczby a i b tak, aby $a \geqslant b$. Wtedy różnica $a-b$ jest podzielna przez 2012. Przyjmijmy wówczas za c dowolną z pozostałych liczb. Iloczyn $(a-b)c$ jest podzielny przez 2012, bo czynnik $a-b$ jest podzielny przez 2012. To kończy dowód.

Zasadę szufladkową Dirichleta można uogólnić: *jeśli umieszczamy przedmioty w szufladkach i dysponujemy większą liczbą przedmiotów, niż k-krotność liczby szufladek, to w pewnej szufladce znajdzie się co najmniej $k+1$ przedmiotów.*

Gdyby bowiem w każdej z szufladek miało znaleźć się najwyżej k przedmiotów, to łącznie moglibyśmy rozmieścić co najwyżej tyle przedmiotów, ile wynosi k-krotność liczby szufladek. Tymczasem z założenia przedmiotów mamy więcej!

Zadanie 4.

Danych jest 1001 liczb naturalnych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 501 liczb parzystych lub 501 nieparzystych.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie

Rozmieszczamy dane liczby w dwóch szufladkach: *parzyste* i *nieparzyste*. Ponieważ mamy więcej niż $500\cdot 2$ liczb, to w pewnej szufladce znajdzie się co najmniej $500+1$ z nich.

Zadanie 5. (I OMG, zawody II stopnia)

Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

Rozwiązanie

Przy dzieleniu przez 11 mamy 11 możliwych reszt, niech to będą nasze szufladki. Rozmieszczamy w nich więcej niż $10\cdot 11=110$ liczb, więc z uogólnionej zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewnych 11 liczb trafi do jednej szufladki. Liczby te dają więc tę samę resztę r przy dzieleniu przez 11, wobec czego są one postaci: $11a_1+r, 11a_2+r, 11a_3+r, \ldots, 11a_{11}+r$, przy czym liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$ są całkowite. Wówczas suma

$$(11a_1+r)+(11a_2+r)+(11a_3+r)+\ldots+(11a_{11}+r)=$$
$$=11(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{11}+r)$$

dzieli się przez 11, co kończy dowód.

Zadanie 6.

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

Rozwiązanie

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Rozważmy reszty z dzielenia przez n liczb $1, 11, 111, \ldots$ W myśl zasady szufladkowej Dirichleta, spośród pierwszych $n+1$ z nich, pewne dwie muszą dawać tę samą resztę z dzielenia przez n. Powiedzmy, że są to liczby $\underbrace{111\ldots1}_{k}$ oraz $\underbrace{111\ldots1}_{l}$, przy czym $k>l$. Wówczas ich różnica dzieli się przez n oraz jest postaci $\underbrace{111\ldots1}_{k-l}\underbrace{000\ldots0}_{l}$.

Zadanie 7.

Na okręgu umieszczonych jest 101 dodatnich liczb całkowitych o sumie równej 300. Udowodnij, że istnieje taki łuk okręgu, że suma umieszczonych na nim liczb jest równa 200.

Rozwiązanie

Oznaczmy dane liczby przez $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{101}$, numerując je wokół okręgu. Rozważmy następujące sumy:

$$\begin{aligned}&a_1,\\&a_1+a_2,\\&a_1+a_2+a_3,\\&\vdots\\&a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}.\end{aligned}$$

Każda z nich jest całkowita dodatnia (bo takie są dane liczby) oraz mniejsza od 300 (bo taka jest suma wszystkich 101 liczb). Jeśli którakolwiek z rozważanych sum równa jest 200, to wyznacza poszukiwany łuk. Jeśli któraś z sum równa jest 100, to łuk zawierający wszystkie pozostałe liczby spełnia warunki zadania.

Załóżmy zatem, że żadna z rozważanych sum nie jest równa 200 ani 100. Wówczas każda z nich przy dzieleniu przez 100 daje jedną z 99 niezerowych reszt. Stąd pewne dwie z tych sum, powiedzmy $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k$ oraz $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_l$ (przy czym $k>l$) dają taką samą resztę przy dzieleniu przez 100. Wtedy ich różnica, czyli liczba $a_{l+1}+a_{l+2}+a_{l+3}+\ldots+a_k$, dzieli się przez 100, jest więc równa 200 lub 100. Podobnie jak powyżej, w pierwszym przypadku wyznacza ona poszukiwany łuk, w drugim zaś przypadku poszukiwany łuk zawiera wszystkie pozostałe z danych 101 liczb.

Na zakończenie kilka zadań do samodzielnego rozwiązania (wskazówki w następnym numerze).

Zadanie 8. (VII OMG, test)

Czy wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją takie dwie, których różnica jest podzielna przez 4?

Zadanie 9.

Danych jest 12 różnych dwucyfrowych liczb naturalnych. Udowodnij, że można tak wybrać pewne dwie z nich, aby ich różnica była liczbą postaci $\overline{aa}$ (gdzie a jest cyfrą).

Zadanie 10.

Wykaż, że w dowolnym ciągu 2012 liczb naturalnych można wskazać pewną liczbę kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez 2012.

Zadanie 11. (XLIII OM, zawody I stopnia)

Wykaż, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

Zadanie 12. (Liga zadaniowa OMG, III seria)

Dana jest liczba pierwsza p oraz pewien zbiór złożony z $p-1$ różnych dodatnich liczb całkowitych niepodzielnych przez p. Udowodnij, że z tego zbioru można wybrać niepusty podzbiór liczb o iloczynie dającym przy dzieleniu przez p resztę 1.

Zadanie 13. (XL OM, zawody II stopnia)

Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Wykaż, że istnieją takie liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$, nie wszystkie równe 0, z których każda jest równa -1, 0 lub 1 oraz liczba

$$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_{11}a_{11}$$

jest podzielna przez 1989.

Joanna Jaszuńska

Oblicz dwoma sposobami

Gdy chcemy wykazać, że pewna sytuacja nie jest możliwa, często warto obliczyć pewną wielkość na dwa sposoby. Jeśli otrzymamy dwa różne wyniki, będzie to oznaczało, że rozważana sytuacja nie może mieć miejsca. Oto kilka przykładów.

Zadanie 1.

Czy liczby $1, 2, \ldots, 20$ można podzielić na cztery rozłączne grupy w taki sposób, aby sumy liczb we wszystkich grupach były równe?

Rozwiązanie

Nie można. Gdyby bowiem istniał taki podział, to suma liczb w każdej grupie byłaby równa pewnej dodatniej liczbie całkowitej a. W takim razie suma wszystkich liczb byłaby równa $4a$.

Z drugiej strony suma wszystkich liczb jest równa

$$1+2+\ldots+20=\frac{20\cdot 21}{2}=2\cdot 105,$$

a więc nie dzieli się przez 4. Wobec tego taki podział nie może istnieć.

Zadanie 2. (LXII OM, zawody I stopnia)

Krawędzie dwunastościanu foremnego chcemy ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 30$, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnij, czy można to uczynić tak, aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była podzielna przez 4.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że żądane ponumerowanie jest możliwe. Wówczas suma numerów na trzech krawędziach schodzących się w każdym wierzchołku jest podzielna przez 4. Dodając owe sumy dla wszystkich wierzchołków otrzymamy liczbę S podzielną przez 4.

Jednocześnie, ponieważ każda krawędź posiada dwa końce, więc w badanej sumie S każda krawędź liczona jest dwukrotnie. Oznacza to, że obliczona suma S jest równa podwojonej sumie numerów na wszystkich krawędziach, a zatem

$$S = 2\cdot(1+2+\ldots+30) = 30\cdot 31.$$

Jednakże otrzymana po prawej stronie liczba nie dzieli się przez 4. Sprzeczność oznacza, że takie ponumerowanie nie jest możliwe.

Zadanie 3. (IV OMG, zawody II stopnia)

W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów?

Rozwiązanie

Taka sytuacja nie jest możliwa. Przypuśćmy przeciwnie, że każdy zawodnik wygrał k meczów, gdzie k jest pewną dodatnią liczbą całkowitą. Liczba wszystkich rozegranych meczów jest równa liczbie wszystkich meczów wygranych, a więc wynosi $50k$.

Z drugiej strony, każdy zawodnik przegrał dokładnie $49-k$ meczów. Wobec tego liczba wszystkich meczów przegranych, a więc i rozegranych w turnieju, wynosi $50\cdot(49-k)$. Zatem otrzymujemy

$$50k = 50\cdot(49-k),$$

skąd wniosek, że $k = 49/2$. Uzyskaliśmy sprzeczność, bowiem liczba k musi być liczbą całkowitą.

Zadanie 4. (VII OMG, zawody I stopnia)

Każda spośród pewnych 99 liczb naturalnych ma w zapisie dziesiętnym 10 jedynek, 20 dwójek oraz pewną liczbę zer. Udowodnij, że liczb tych nie można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, aby iloczyn liczb z pierwszej grupy był równy iloczynowi liczb z drugiej grupy.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje podział opisany w treści zadania. Można więc podzielić dane liczby na takie dwie grupy $x_1, x_2, \ldots, x_k$ oraz $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{99}$, że

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k = x_{k+1}\cdot x_{k+2}\cdot\ldots\cdot x_{99}.$$

Wówczas

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{99} = (x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k)^2.$$

Ponieważ suma cyfr każdej z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{99}$ jest równa 50, więc każda z tych liczb daje resztę 2 z dzielenia przez 3. W takim razie

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_{99} \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3.$$

Stąd wynika, że

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{99} \equiv (-1)^{99} = -1 \pmod 3.$$

Z drugiej zaś strony

$$(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k)^2 \equiv (-1)^{2k} = 1 \pmod 3,$$

skąd $-1 \equiv 1 \pmod 3$. Sprzeczność ta kończy dowód.

Na koniec podajemy kilka zadań dla Czytelników do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do tych zadań podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5. (Koło Matematyczne OMG, zestaw 8)

Każdą z liczb $1, 2, \ldots, 33$ zapisano na oddzielnej kartce. Czy można tak rozłożyć te kartki w jedenastu pudełkach, aby w każdym pudełku znalazły się 3 kartki i aby w każdym pudełku suma liczb napisanych na dwóch kartkach była równa liczbie napisanej na trzeciej kartce?

Zadanie 6. (XLI OM, zawody I stopnia)

Udowodnij, że krawędzi sześcianu nie da się ponumerować liczbami od 1 do 12, używając każdej z nich dokładnie raz, tak, by suma numerów krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka była taka sama.

Zadanie 7.

Każda ściana pewnego wielościanu wypukłego ma liczbę krawędzi podzielną przez 4. Wykaż, że wielościan ten ma parzystą liczbę krawędzi.

Zadanie 8. (*Baltic Way* 2001)

Liczby $1, 2, \ldots, 49$ rozmieszczono w tablicy 7×7, po czym obliczono sumę liczb w każdym wierszu i każdej kolumnie. Niektóre z tych 14 sum są nieparzyste, a pozostałe są parzyste. Niech A oznacza sumę wszystkich nieparzystych sum, a B sumę wszystkich parzystych sum. Czy jest możliwe takie rozmieszczenie liczb, że $A = B$?

Michał Kieza

Trójkąty równoramienne w wielokątach

W maju br. w Mszanie Dolnej odbyły się pierwsze Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów. Podczas indywidualnej części zawodów należało rozwiązać 5 zadań. Jedno z nich zaproponowane zostało przez opiekuna czeskiej reprezentacji — autora niniejszego artykułu i brzmiało następująco:

Zadanie

Udowodnij, że spośród dowolnych 51 wierzchołków 101-kąta foremnego można wybrać trzy, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Większość prawidłowych rozwiązań tego problemu opierała się na zastosowaniu tzw. zasady szufladkowej Dirichleta. Jest to jedno z najprostszych, a jednocześnie najbardziej skutecznych narzędzi w kombinatoryce; w najbardziej podstawowym sformułowaniu orzeka, że jeśli włożymy $n+1$ skarpet do n szufladek (zapewne stąd wzięła się zagadkowa nazwa), to znajdziemy szufladkę, wewnątrz której będą co najmniej dwie skarpety. Przyjrzyjmy się, w jaki sposób można wykorzystać tę zasadę do badania naszego problemu.

W celu oswojenia się z treścią zadania, zastąpmy liczbę 51 parametrem k. Otrzymamy wtedy następujące

Stwierdzenie

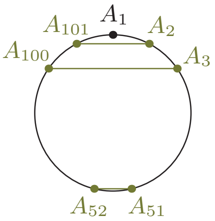
Spośród dowolnych k wierzchołków 101-kąta foremnego można wybrać trzy, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

To, czy powyższe stwierdzenie jest prawdziwe zależy oczywiście od parametru k. Jeśli liczba k jest odpowiednio mała, np. $k=3$, $k=4$ lub $k=5$, to stwierdzenie jest fałszywe — zachęcamy Czytelnika do podania odpowiednich kontrprzykładów. Z drugiej strony, nietrudno zauważyć, że jeśli dla pewnego $k<101$ stwierdzenie jest prawdziwe, to jest ono słuszne także dla wszystkich parametrów k' większych od k ($k<k'\leqslant 101$).

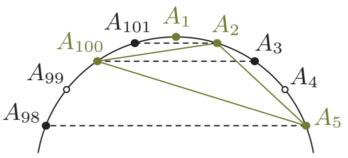
Wykażemy teraz, że stwierdzenie jest prawdziwe dla $k=52$. Oznaczmy kolejne wierzchołki naszego 101-kąta przez $A_1,A_2,\ldots,A_{101}$ i w dowolny sposób wybierzmy 52 z nich. Nie tracąc ogólności rozumowania, możemy przyjąć, że wśród wybranych wierzchołków znajduje się A_1. Pozostałe punkty $A_2,A_3,\ldots,A_{101}$ łączymy w następujące pary (rys. 1):

(1) $\{A_2,A_{101}\},\ \{A_3,A_{100}\},\ \ldots,\ \{A_{51},A_{52}\}\,.$

Spośród punktów znajdujących się w tych 50 parach wybrano 51. Wobec tego, w myśl zasady szufladkowej, zostały wybrane dwa punkty należące do jednej pary. Punkty te wraz z A_1 są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. To kończy dowód naszego stwierdzenia dla $k=52$.



rys. 1



rys. 2

Chociaż skorzystaliśmy z zasady szufladkowej w tak prosty sposób, udało się nam udowodnić stwierdzenie dla wszystkich $k\geqslant 52$. Powstaje więc pytanie, czy można wykorzystać pary (1) także do dowodu stwierdzenia dla $k=51$. Z tym właśnie przypadkiem zmagali się uczestnicy zawodów w Mszanie Dolnej. Jasnym jest, że mogli oni ograniczyć swoją uwagę do sytuacji, w której wśród 51 wybranych wierzchołków znajduje się A_1 oraz po jednym punkcie z każdej z 50 par (1). Dla tego przypadku zawodnicy przeprowadzali rozumowanie różnymi sposobami, przedstawię teraz jeden z nich.

Przypuśćmy, że wśród wybranych 51 punktów żadne trzy nie są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Zgodnie z przyjętymi wyżej założeniami, dokładnie jeden z punktów pary $\{A_2,A_{101}\}$ jest wśród wybranych przez nas wierzchołków. Nie tracąc ogólności, możemy przyjąć, że wybraliśmy A_2, a zostawiliśmy A_{101} (rys. 2). Trójkąt $A_1A_2A_3$ jest równoramienny, więc nie wybraliśmy A_3 i dlatego musieliśmy wybrać A_{100} (ze względu na parę $\{A_3,A_{100}\}$ w (1)). Podobnie, trójkąt $A_1A_{98}A_{100}$ jest równoramienny, więc nie wybraliśmy A_{98} i dlatego musieliśmy wybrać A_5. Wobec tego wśród wybranych punktów znajdują się A_2, A_{100}, A_5 i są to wierzchołki trójkąta równoramiennego. Dowód naszego stwierdzenia dla $k=51$ został więc zakończony.

Tylko jednemu uczestnikowi zawodów w Mszanie, mianowicie *Pavlowi Turkowi* z Czech, udało się na tyle zręcznie zastosować zasadę szufladkową, by od razu rozwiązywała ona problem dla $k=51$; zaprezentuję teraz jego ciekawe rozumowanie.

Ponownie wybieramy 51 punktów spośród wierzchołków 101-kąta foremnego. Zauważmy, że istnieje dokładnie $\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 51=1275$ odcinków o końcach w wybranych punktach. Ponadto każdy z tych odcinków ma taką samą długość, jak jeden z 50 odcinków $A_1A_2, A_1A_3,\ldots,A_1A_{51}$. Mamy zatem 1275 *skarpetek* (odcinków) rozłożonych w 50 *szufladkach* (możliwych długościach odcinków); oznacza to, że w którejś *szufladce* znalazło się nie mniej niż $1275:50=25\frac{1}{2}$ *skarpetek*, tzn. wśród odcinków o końcach w wybranych przez nas punktach istnieje 26 o równych długościach. Ponieważ wybranych punktów było tylko 51, więc pewne dwa spośród tych 26 odcinków muszą mieć wspólny koniec. Te dwa odcinki są bokami trójkąta równoramiennego o wierzchołkach w wybranych punktach, co kończy dowód.

Oznaczmy przez $k(101)$ największą taką liczbę k, dla której nasze stwierdzenie jest *fałszywe*. Ogólnie, zastępując liczbę 101 przez n, niech $k(n)$ będzie największą możliwą do wybrania liczbą wierzchołków n-kąta foremnego, aby żadne trzy wybrane punkty nie były wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Wykazaliśmy zatem, że $k(101)<51$, jednak dokładna wartość liczby $k(101)$ nie jest znana autorowi. Wartości $k(n)$ dla $n\leqslant 71$ zostały obliczone przy pomocy komputera przez *Bohuslava Zmeka*, studenta Uniwersytetu Masaryka w Brnie. Przedstawia je następująca tabela.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k(n)$	2	2	2	4	3	4	4	4	4	4	4	6	4	6

n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$k(n)$	5	8	6	8	6	8	6	8	7	8	8	8	8	8

n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
$k(n)$	8	9	8	10	9	10	10	12	10	11	9	12	9	12

n	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
$k(n)$	10	12	10	13	10	14	11	14	11	16	11	16	12	16

n	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
$k(n)$	12	16	13	16	13	16	14	16	13	16	16	18	14	?

Jak widzicie, liczby $k(n)$ układają się w dość nieregularny sposób. Spełniona jest jednak pewna ciekawa zależność:

$$k(4n+2)=2\cdot k(2n+1)$$

dla wszystkich n. Czy potraficie ją udowodnić?

Jaromír Šimša

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Sztuczka z iloczynem

4. Postępuj analogicznie jak w rozwiązaniach zadań 2 i 3.

5. Doprowadź dane równanie do postaci $xy-px-py=0$.

O n kolejnych liczbach

5. Wykorzystaj tożsamości

$$n^4-8n=n(n^3-8)=n(n-2)(n^2+2n+4)\,,$$
$$n^4+8n=n(n^3+8)=n(n+2)(n^2-2n+4)\,.$$

6. Zauważ, że $(n+1)^3-n=(n+1)^3-(n+1)+1$.

7. Przekształćmy: $n^7-n=n(n^6-1)=n(n^3-1)(n^3+1)=$
$=n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: `kwadrat.omg@gmail.com`