Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013
Seria II (sierpień 2012)

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

6. Czy prostokąt o wymiarach 90×91 można podzielić na prostokąty o wymiarach 9×10 ?

7. Dana jest taka liczba naturalna k, że liczby $10k+1$, $40k+1$, $50k+1$ są pierwsze. Niech $n=(10k+1)\cdot(40k+1)\cdot(50k+1)$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej a, liczba $a^{2n-1}-a$ jest podzielna przez n.

8. Liczba naturalna n jest iloczynem k różnych liczb pierwszych nieparzystych. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $a<n$, że liczba a^2-1 jest podzielna przez n?

9. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta styczna do okręgu o_1 w punkcie A przecina okrąg o_2 w punktach A i D. Prosta styczna do okręgu o_2 w punkcie A przecina okrąg o_1 w punktach A i C. Wykaż, że prosta AB zawiera dwusieczną kąta CBD.

10. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots x_{2012}$ spełniających warunek $x_1+x_2+\ldots+x_{2012}=2012$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1^3}{x_2}+\frac{x_2^3}{x_3}+\frac{x_3^3}{x_4}+\ldots+\frac{x_{2011}^3}{x_{2012}}+\frac{x_{2012}^3}{x_1} \geqslant 2012\,.$$

Urszula Swianiewicz
Kierownik naukowy obozu

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego