Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria III (wrzesień 2012)

11. Lech, Czech i Rus konkurują o rękę królewny. Król usypał na środku komnaty stos złożony z 2012 dukatów i nakazał konkurentom kolejno dzielić stosy dukatów na mniejsze, jednak przesądny król zabronił dzielić stosów złożonych z 13 dukatów. W jednym posunięciu konkurent wybiera więc dowolny stos zawierający co najmniej 2 dukaty, ale niezawierający dokładnie 13 dukatów i dzieli go dowolnie na dwa niepuste stosy. Swoje posunięcia konkurenci wykonują cyklicznie: Lech, Czech, Rus, Lech, Czech, Rus,...

Król obiecał rękę królewny temu, kto jako ostatni dokona podziału stosu dukatów.

Czy któryś z konkurentów może zapewnić sobie rękę królewny niezależnie od posunięć pozostałych konkurentów? Jeżeli tak, to który i jak powinien on postępować w trakcie rozgrywki?

12. Wyznacz wszystkie czwórki kolejnych liczb całkowitych dodatnich, dla których pierwiastek kwadratowy iloczynu ma na pierwszym miejscu po przecinku cyfrę parzystą.

13. Dana jest liczba pierwsza p oraz zbiór złożony z $p-1$ różnych liczb całkowitych dodatnich niepodzielnych przez p.

Udowodnij, że z tego zbioru można wybrać niepusty podzbiór liczb o iloczynie dającym przy dzieleniu przez p resztę 1.

14. Kule ω_1, ω_2 i ω_3 o promieniach odpowiednio 3, 4 i 12 są parami styczne zewnętrznie. Pewna płaszczyzna jest styczna do kuli ω_1 w punkcie A, do kuli ω_2 – w punkcie B i do kuli ω_3 – w punkcie C. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

15. Okrąg o, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boków AC i AB odpowiednio w punktach F i S. Punkt O jest środkiem okręgu o, a punkt E jest symetryczny do punktu S względem punktu A. Wykaż, że proste EF i AO są równoległe.

Urszula Swianiewicz
Kierownik naukowy obozu

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego