Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria IV (październik 2012)

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

16. Dla danej liczby naturalnej n rozważamy wszystkie sumy postaci

$$1 \cdot a_1 \cdot b_1 + 2 \cdot a_2 \cdot b_2 + 3 \cdot a_3 \cdot b_3 + 4 \cdot a_4 \cdot b_4 + \ldots + n \cdot a_n \cdot b_n,$$

gdzie $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ są permutacjami ciągu $(1, 2, 3, \ldots, n)$. Udowodnij, że największa z tych sum jest kwadratem liczby naturalnej.

17. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y istnieje taka liczba całkowita dodatnia $n \leqslant 1000000$, że każda z liczb nx oraz ny ma w zapisie dziesiętnym na trzech pierwszych miejscach po przecinku same dziewiątki lub same zera.

18. Rozważamy wszystkie możliwe podziały prostokąta 77×75 na kwadraty 1×1, 2×2 i 5×5. Wyznacz najmniejszą liczbę kwadratów 1×1, jaka może pojawić się w takim podziale.

19. Niech $ABCD$ będzie takim czworokątem wypukłym, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$. Załóżmy ponadto, że punkt przecięcia symetralnych boków DA i BC leży na odcinku AB. Udowodnij, że $AC = BD$.

20. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{20} + \frac{3}{85} + \frac{4}{260} + \frac{5}{629} + \frac{6}{1300} + \ldots + \frac{n}{n^4 + 4} < \frac{3}{8}.$$

Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego