Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria VI (grudzień 2012) — rozwiązania zadań

26. *Udowodnij, że istnieje* 10^{100} *kolejnych liczb całkowitych dodatnich nie większych od* 10^{2012}*, z których żadna nie jest postaci* $a^3+b^4+c^5+d^6$*, gdzie* a,b,c,d *są liczbami całkowitymi dodatnimi.*

Rozwiązanie

Oszacujemy, ile jest liczb postaci $a^3+b^4+c^5+d^6$ nie większych od $N=10^{2000}$ dla liczb całkowitych dodatnich a,b,c,d.

Nierówność $a^3+b^4+c^5+d^6 \leqslant N$ może być spełniona tylko wtedy, gdy każdy z czterech składników po lewej stronie jest nie większy od N, czyli gdy

$$a \leqslant N^{1/3}, \quad b \leqslant N^{1/4}, \quad c \leqslant N^{1/5}, \quad d \leqslant N^{1/6}.$$

Liczba czwórek liczb całkowitych dodatnich (a,b,c,d) spełniających powyższe nierówności jest równa co najwyżej $\left[N^{1/3}\right]\cdot\left[N^{1/4}\right]\cdot\left[N^{1/5}\right]\cdot\left[N^{1/6}\right]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Ponieważ $N^{1/3}$ nie jest liczbą całkowitą, mamy $\left[N^{1/3}\right]<N^{1/3}$, więc

$$\left[N^{1/3}\right]\cdot\left[N^{1/4}\right]\cdot\left[N^{1/5}\right]\cdot\left[N^{1/6}\right]<N^{1/3}\cdot N^{1/4}\cdot N^{1/5}\cdot N^{1/6}.$$

Wobec tego oraz na mocy równości

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{20+15+12+10}{60}=\frac{57}{60}=\frac{19}{20},$$

wśród 10^{2000} początkowych liczb całkowitych dodatnich, mniej niż $N^{19/20}=10^{1900}$ jest postaci opisanej w treści zadania.

Jeżeli więc podzielimy zbiór 10^{2000} początkowych liczb całkowitych dodatnich na 10^{1900} zbiorów, z których każdy zawiera 10^{100} kolejnych liczb, to w co najmniej jednym z tych zbiorów nie będzie żadnej liczby postaci $a^3+b^4+c^5+d^6$, co kończy rozwiązanie zadania (znalezione liczby są nie większe od 10^{2000}, więc tym bardziej od 10^{2012}).

27. *Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej* n *zachodzi nierówność*

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{5}{3}-\frac{2}{2n+1}.$$

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód indukcyjny (więcej o tej metodzie można przeczytać w dodatku tematycznym „Opowieści o indukcji”).

1° Dla $n=1$ po lewej stronie nierówności znajduje się jeden składnik równy 1, natomiast prawa strona ma wartość $\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$. Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1\leqslant 1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{5}{3}-\frac{2}{2n+1}.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Udowodnimy, że wówczas

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant\frac{5}{3}-\frac{2}{2n+3}. \tag{1}$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant\frac{5}{3}-\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2},$$

co zakończy dowód nierówności (1), o ile udowodnimy

$$-\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant-\frac{2}{2n+3}.$$

Mnożąc powyższą nierówność stronami przez iloczyn mianowników występujących w niej wyrażeń (wszystkie te mianowniki są dodatnie), otrzymujemy nierówność równoważną:

$$-2\cdot(2n+3)\cdot(n+1)^2+(2n+1)\cdot(2n+3)\leqslant-2\cdot(2n+1)\cdot(n+1)^2,$$

którą kolejno przekształcamy do:

$$\begin{aligned}
(2n+1)\cdot(2n+3)&\leqslant-2\cdot(2n+1)\cdot(n+1)^2+2\cdot(2n+3)\cdot(n+1)^2,\\
(2n+1)\cdot(2n+3)&\leqslant 2\cdot(2n+3-2n-1)\cdot(n+1)^2,\\
(2n+1)\cdot(2n+3)&\leqslant 4\cdot(n+1)^2,\\
4n^2+8n+3&\leqslant 4n^2+8n+4,
\end{aligned}$$

a to jest nierówność prawdziwa dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdego całkowitego dodatniego n.

Uwaga

Zadanie można także rozwiązać, korzystając z równości

$$1+\frac{1}{4-0,25}+\frac{1}{9-0,25}+\frac{1}{16-0,25}+\ldots+\frac{1}{n^2-0,25}=\frac{5}{3}-\frac{2}{2n+1}.$$

Równość tę można udowodnić indukcyjnie lub stosując do składników lewej strony tożsamość

$$\frac{1}{k^2-0,25}=\frac{2}{2k-1}-\frac{2}{2k+1}$$

i dokonując uproszczenia wyrażeń przeciwnych.

---

28. *Udowodnij, że istnieją względnie pierwsze liczby całkowite dodatnie m,n spełniające równanie* $2m^2+7^{2012}=n^2$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że liczby $x_1=3$ oraz $y_1=1$ spełniają równanie $2y_1^2+7=x_1^2$.

Niech dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k liczby x_k oraz y_k będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że

$$x_k+y_k\sqrt{2}=\left(3+\sqrt{2}\right)^k.$$

Wówczas zachodzi równość

$$x_k-y_k\sqrt{2}=\left(3-\sqrt{2}\right)^k,$$

skąd

$$x_k^2-2y_k^2=\left(x_k+y_k\sqrt{2}\right)\cdot\left(x_k-y_k\sqrt{2}\right)=\left(3+\sqrt{2}\right)^k\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)^k=\left(\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\right)^k=7^k.$$

Zatem równanie dane w zadaniu jest spełnione przez $n=x_{2012}$ oraz $m=y_{2012}$. Pozostaje wykazać, że są to liczby względnie pierwsze.

Udowodnimy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k liczby x_k, y_k są względnie pierwsze. Ponieważ $x_k^2-2y_k^2=7^k$, więc każdy wspólny dzielnik liczb x_k oraz y_k jest także dzielnikiem liczby 7^k, czyli potęgą siódemki. Wystarczy zatem wykazać, że żadna z liczb x_k, y_k nie jest podzielna przez 7. Zauważmy, że z uwagi na równość

$$x_{k+1}+y_{k+1}\sqrt{2}=\left(x_k+y_k\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)$$

liczby x_k, y_k spełniają równania rekurencyjne

$$x_{k+1}=3x_k+2y_k \quad \text{oraz} \quad y_{k+1}=x_k+3y_k. \tag{2}$$

Udowodnimy indukcyjnie następujący lemat.

Lemat

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k spełnione są kongruencje

$$x_k\equiv 3\cdot(-1)^{k+1} \pmod 7 \quad \text{oraz} \quad y_k\equiv(-1)^{k+1} \pmod 7. \tag{3}$$

Dowód lematu

1° Dla $k=1$ kongruencje (3) są oczywiście spełnione.

2° Niech k będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że prawdziwe są kongruencje (3). Udowodnimy, że wówczas

$$x_{k+1}\equiv 3\cdot(-1)^{k+2} \pmod 7 \quad \text{oraz} \quad y_{k+1}\equiv(-1)^{k+2} \pmod 7. \tag{4}$$

Z kongruencji (3) oraz rekurencji (2) wynika, że

$$x_{k+1}=3x_k+2y_k\equiv 3\cdot 3\cdot(-1)^{k+1}+2\cdot(-1)^{k+1}=11\cdot(-1)^{k+1}\equiv 3\cdot(-1)^{k+2} \pmod 7$$

oraz

$$y_{k+1}=x_k+3y_k\equiv 3\cdot(-1)^{k+1}+3\cdot(-1)^{k+1}=6\cdot(-1)^{k+1}\equiv(-1)^{k+2} \pmod 7,$$

co dowodzi prawdziwości kongruencji (4).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej kongruencje (3) są prawdziwe dla każdego k, co kończy dowód lematu i rozwiązanie zadania.

Uwagi

Skonstruowane powyżej liczby m i n mają odpowiednio 1297 i 1298 cyfr.

Sama rekurencja (2) nie wystarczy, aby dowodzić indukcyjnie niepodzielności liczb x_k i y_k przez 7. Niezbędne jest zauważenie, że początkowe wartości x_1 i y_1 dają odpowiednie reszty z dzielenia przez 7. Gdyby bowiem dla pewnego k było

$$x_k\equiv 1 \pmod 7 \quad \text{oraz} \quad y_k\equiv 2 \pmod 7,$$

to na mocy (2) mielibyśmy

$$x_{k+1}\equiv 0 \pmod 7 \quad \text{oraz} \quad y_{k+1}\equiv 0 \pmod 7.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

29. *Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC+BC=2\cdot AB$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykaż, że jeśli $O\neq I$, to proste OI i CI są prostopadłe.*

Rozwiązanie

Lemat

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC i niech X będzie środkiem tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, na którym nie leży punkt C. Wówczas punkty C, I oraz X są współliniowe, a ponadto zachodzą równości $AX=BX=IX$.

Dowód lematu

Niezawierające punktu C łuki AX i BX są równe, wobec tego cięciwy AX i BX mają jednakową długość.

Również kąty ACX i BCX są równe, ponieważ oba są wpisane oparte na łukach tej samej długości. Wobec tego dwusieczna kąta ACB zawiera punkt X. Dwusieczna ta zawiera także punkt I, a zatem punkty C, I oraz X są współliniowe. Ponadto

$$\sphericalangle IAX=\sphericalangle IAB+\sphericalangle BAX=\sphericalangle IAC+\sphericalangle BCX=\sphericalangle IAC+\sphericalangle ACX=\sphericalangle AIX\,,$$

gdyż suma dwóch kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa kątowi zewnętrznemu przy trzecim wierzchołku. Stąd wniosek, że $AX=IX$ (trójkąt AXI jest równoramienny). To kończy dowód lematu.

Przechodzimy teraz do rozwiązania zadania. Niech D, E, F będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio z bokami BC, CA, AB. Wówczas $BD=BF$, $CD=CE$ i $AE=AF$. Stąd

$$CE=\frac{1}{2}(CE+CD)=\frac{1}{2}(CA+CB-AE-BD)=\frac{1}{2}(CA+CB-AF-BF)=$$
$$=\frac{1}{2}(CA+CB-AB)=\frac{1}{2}AB.$$

Niech X będzie środkiem tego łuku AB, na którym nie leży punkt C, natomiast przez Y oznaczmy środek boku AB. Wówczas proste OY i CI przechodzą przez punkt X (jako symetralna boku AB i dwusieczna kąta ACB). Ponadto $\sphericalangle ECI=\sphericalangle ACX=\sphericalangle ABX$. Stąd oraz z równości $BY=\frac{1}{2}AB=CE$, $\sphericalangle BYX=90^\circ=\sphericalangle CEI$ wnioskujemy, że trójkąty CEI i BYX są przystające (cecha kąt–bok–kąt), w szczególności więc $CI=BX$.

Wiemy z lematu, że $BX=IX$. W takim razie $CI=IX$, skąd wynika, że I jest środkiem cięciwy CX i wobec tego proste OI i CX są prostopadłe.

---

30. *Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba 957^n-64 jest złożona.*

Rozwiązanie

1° Zauważmy, że $957\equiv 7 \pmod{19}$, a ponadto $7^3=343\equiv 1 \pmod{19}$, skąd wynika, że dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej k

$$957^{3k+1}\equiv 7^{3k+1}=\left(7^3\right)^k\cdot 7\equiv 1^k\cdot 7=7 \pmod{19}.$$

Ponieważ także $64\equiv 7 \pmod{19}$, więc otrzymujemy

$$957^{3k+1}-64\equiv 0 \pmod{19}.$$

Zatem dana w zadaniu liczba jest złożona (jako podzielna przez 19 i większa od 19), jeżeli liczba n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2° Podobnie $957 \equiv 8 \pmod{73}$, skąd $957^2 \equiv 64 \pmod{73}$. Ponadto

$$8^3 = 512 \equiv 1 \pmod{73}.$$

Wobec tego dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej k

$$957^{3k+2} \equiv 8^{3k+2} = \left(8^3\right)^k \cdot 8^2 \equiv 1^k \cdot 64 = 64 \pmod{73}.$$

Stąd otrzymujemy

$$957^{3k+2} - 64 \equiv 0 \pmod{73}.$$

Zatem dana w zadaniu liczba jest złożona (jako podzielna przez 73 i większa od 73), jeżeli liczba n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

3° Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy liczba n jest podzielna przez 3. W tym przypadku dana w zadaniu liczba jest złożona jako różnica sześcianów, gdyż możemy wówczas skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia. Niech bowiem $n = 3k$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią. Wtedy

$$957^{3k} - 64 = \left(957^k\right)^3 - 4^3 = \left(957^k - 4\right) \cdot \left(957^{2k} + 4 \cdot 957^k + 16\right),$$

gdzie oba czynniki są większe od 1.

Uwagi

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to złożoność danej w zadaniu liczby wynika ze wzoru na różnicę kwadratów. Jednak spostrzeżenie to nie wydaje się być przyczynkiem do rozwiązania zadania, gdyż i tak pozostający do rozpatrzenia przypadek n nieparzystego sprowadza się do rozważenia trzech przypadków zamieszczonych w rozwiązaniu powyżej.

Następujące dane numeryczne wskazują, że najprawdopodobniej nie można uniknąć trzech przypadków rozpatrywanych przez nas w rozwiązaniu zadania.

Dla $n = 7$ dana w zadaniu liczba jest równa

$$19 \cdot 38692782622916827991,$$

gdzie drugi czynnik jest 20-cyfrową liczbą pierwszą. Trudno więc wyobrazić sobie rozwiązanie, które nie używa argumentu podzielności przez 19 jako powodu złożoności danej w zadaniu liczby.

Z kolei dla $n = 17$ otrzymujemy liczbę

$$73 \cdot 6489034483926388583667788350696178702928968861141,$$

gdzie występujący powyżej 49-cyfrowy czynnik pierwszy odbiera nadzieję na uniknięcie w rozwiązaniu rozważania podzielności przez 73.

Wreszcie dla $n = 3$ przytoczony w rozwiązaniu rozkład wynikający ze wzoru na różnicę sześcianów prowadzi do iloczynu

$$953 \cdot 919693,$$

w którym oba czynniki są pierwsze. Nie należy więc spodziewać się istnienia prostego rozwiązania, które unika rozkładu różnicy sześcianów na iloczyn. Tym bardziej, że rozważanie podzielności przez 953 niewiele może wnieść do rozwiązania, gdyż dana w zadaniu liczba jest podzielna przez 953 tylko dla n dających przy dzieleniu przez 34 resztę 3.

Pozostaje pytanie, jak można było wpaść na przedstawione rozwiązanie zadania. Otóż wydaje się, że najprostsze powody złożoności liczb zdefiniowanych wspólnym wzorem są dwa: rozkład wyrażenia definiującego na iloczyn oraz podzielność przez ustaloną liczbę.

Ponieważ 64 jest szóstą potęgą, można było zauważyć, że łatwo wnioskujemy złożoność danej liczby, gdy wykładnik n jest parzysty lub podzielny przez 3, gdyż wtedy możemy skorzystać ze wzoru na różnicę odpowiednio kwadratów lub sześcianów.

W pozostałych przypadkach próbujemy dowodzić podzielności przez konkretne liczby. Tylko które? Ano te możliwie nieduże liczby pierwsze, których obecność jesteśmy w stanie stwierdzić w rozkładach danych w zadaniu liczb na czynniki pierwsze.

Biorąc $n=1$ otrzymujemy liczbę $957-64=893=19\cdot 47$, skąd wskazówka, aby badać podzielność przez 19.

Z kolei dla $n=2$ mamy $957^2-64=(957-8)\cdot(957+8)=949\cdot 965=13\cdot 73\cdot 5\cdot 193$. Badanie podzielności przez 5 i 13 nie prowadzi do niczego użytecznego, bo pozwala wyeliminować liczby n dające przy dzieleniu przez 4 resztę 2 (a więc tylko parzyste, z którymi umiemy już sobie poradzić). Następna w kolejce liczba 73 prowadzi do przypadku brakującego do pełnego rozwiązania zadania.

Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego