Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

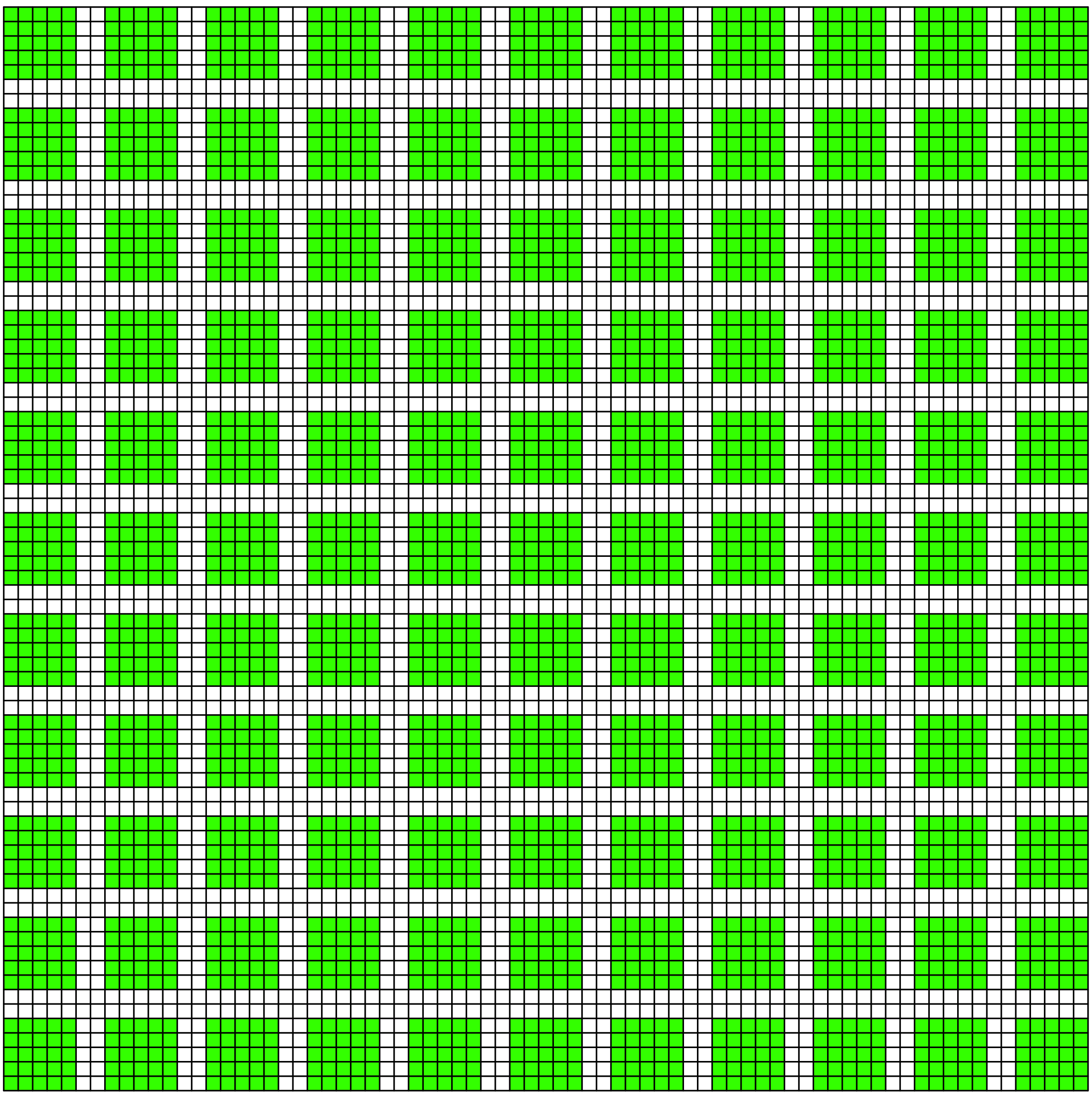
Liga zadaniowa 2012/2013

Seria X (kwiecień 2013) — rozwiązania zadań

46. *Na szachownicy* 75×75 *umieszczono 120 kwadratów* 3×3 *tak, że każdy pokrywa 9 pól. Udowodnij, że na tej szachownicy można umieścić dodatkowo kwadrat* 5×5 *tak, aby pokrywał 25 wolnych pól.*

Rozwiązanie

Zamalujmy na szachownicy 121 kwadratów 5×5 jak na rysunku 1.



rys. 1

Wówczas każdy ze 120 kwadratów 3×3, umieszczonych na szachownicy zgodnie z warunkami zadania, może mieć wspólne pola tylko z jednym zamalowanym kwadratem 5×5. Zatem co najmniej jeden zamalowany kwadrat pokrywa 25 wolnych pól i tam właśnie można umieścić dodatkowy kwadrat 5×5, opisany w treści zadania.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

47. *Rozstrzygnij, czy dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba 3^n+n^2 jest podzielna przez p.*

Rozwiązanie
Wykażemy, że żadna z liczb postaci 3^n+n^2 nie jest podzielna przez 11.

Udowodnimy najpierw, że przy dzieleniu przez 11, potęgi trójki o wykładnikach całkowitych dodatnich dają cyklicznie pięć reszt:

$$3,\ 9,\ 5,\ 4,\ 1,$$

natomiast kwadraty dodatnich liczb całkowitych dają cyklicznie reszty:

$$1,\ 4,\ 9,\ 5,\ 3,\ 3,\ 5,\ 9,\ 4,\ 1,\ 0.$$

Pierwsze spostrzeżenie uzasadniamy, obliczając początkowych 5 reszt, a następnie wykorzystując kongruencje

$$3^{5k+r} = \left(3^5\right)^k \cdot 3^r = 243^k \cdot 3^r \equiv 1^k \cdot 3^r = 3^r \pmod{11},$$

gdzie $r=1,2,3,4,5$, a liczba k przyjmuje wartości całkowite nieujemne.

Z kolei drugie spostrzeżenie wynika z obliczenia 11 początkowych reszt i zastosowania do nich kongruencji

$$(11k+r)^2 \equiv r^2 \pmod{11}$$

dla $r=1,2,3,\ldots,10,11$ oraz k przebiegającego nieujemne liczby całkowite.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że żadna z sum postaci $a+b$, gdzie $a\in\{1,3,4,5,9\}$ oraz $b\in\{0,1,3,4,5,9\}$, nie jest równa 11, a przy tym spełniają one nierówności $1\leqslant a+b\leqslant 18$. Zatem żadna suma nie jest podzielna przez 11.

Odpowiedź
Sformułowane w treści zadania twierdzenie jest fałszywe.

Uwaga
Wykorzystując zaawansowane twierdzenia z teorii liczb, dotyczące pojęć reszty i niereszty kwadratowej, można wykazać, że wśród liczb postaci 3^n+n^2 nie ma liczby podzielnej przez liczbę pierwszą p wtedy i tylko wtedy, gdy p daje przy dzieleniu przez 12 resztę 11.

---

48. *Rozstrzygnij, czy dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba 3^n+n^p jest podzielna przez p.*

Rozwiązanie
Wykażemy, że sformułowane w treści zadania twierdzenie jest prawdziwe.

Sposób I
W rozwiązaniu skorzystamy z następujących dwóch znanych twierdzeń oraz udowodnimy lemat będący wnioskiem z małego twierdzenia Fermata.

Małe twierdzenie Fermata
Dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnej liczby całkowitej a zachodzi kongruencja

$$a^p \equiv a \pmod{p}. \tag{1}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Chińskie twierdzenie o resztach (najprostsza wersja)

Dla dowolnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych m_1, m_2 oraz dowolnych liczb całkowitych r_1, r_2 istnieje dodatnia liczba całkowita n, spełniająca układ kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ n \equiv r_2 \pmod{m_2}. \end{cases}$$

Lemat

Dla dowolnej liczby pierwszej p, dowolnej liczby całkowitej a oraz dowolnych dodatnich liczb całkowitych s, t, spełniających kongruencję

$$s \equiv t \pmod{p-1},$$

zachodzi

$$a^s \equiv a^t \pmod{p}.$$

Dowód lematu

Przeprowadzimy rozumowanie podobne do przedstawionego w rozwiązaniu zadania 7 z Ligi OMG (seria II, sierpień 2012).

Bez szkody dla ogólności dowodu możemy założyć, że $s<t$. Wówczas liczba $k=\frac{t-s}{p-1}$ jest dodatnia i całkowita, a przy tym $t=s+k(p-1)$.

Jeżeli $s>1$, to mnożąc obie strony kongruencji (1) przez a^{s-1} otrzymujemy

$$a^{s+p-1} \equiv a^s \pmod{p}. \tag{2}$$

Jeśli natomiast $s=1$, to kongruencja (2) jest identyczna z kongruencją (1).

Wychodząc od kongruencji (2) i wielokrotnie mnożąc obie strony przez a^{p-1}, otrzymujemy kolejno

$$a^{s+2(p-1)} \equiv a^{s+p-1} \pmod{p},$$
$$a^{s+3(p-1)} \equiv a^{s+2(p-1)} \pmod{p},$$
$$a^{s+4(p-1)} \equiv a^{s+3(p-1)} \pmod{p}$$

itd. Zatem

$$a^s \equiv a^{s+p-1} \equiv a^{s+2(p-1)} \equiv a^{s+3(p-1)} \equiv a^{s+4(p-1)} \equiv \ldots \equiv a^{s+k(p-1)} = a^t \pmod{p},$$

co kończy dowód lematu.

Przystępując do głównej części rozwiązania zadania, zauważmy najpierw, że z małego twierdzenia Fermata wynika kongruencja

$$3^n + n^p \equiv 3^n + n \pmod{p}.$$

Zatem w treści zadania liczbę 3^n+n^p można zamienić na 3^n+n.

Niech r będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Ponieważ liczby $p-1$ oraz p są względnie pierwsze, możemy zastosować chińskie twierdzenie o resztach dla $m_1=p-1$ oraz $m_2=p$. Wynika stąd istnienie dodatniej liczby całkowitej n, która jest rozwiązaniem układu kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv r \pmod{p-1} \\ n \equiv -3^r \pmod{p}. \end{cases}$$

Wówczas, na podstawie udowodnionego wcześniej lematu, z pierwszej kongruencji układu wynika, że $3^n \equiv 3^r \pmod{p}$, skąd, uwzględniając drugą kongruencję układu, uzyskujemy $3^n+n \equiv 3^r+(-3^r)=0 \pmod{p}$, co kończy rozwiązanie zadania.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Sposób II

W rozwiązaniu skorzystamy z małego twierdzenia Fermata w wersji nieco innej niż podana w sposobie I.

Małe twierdzenie Fermata (inna wersja)

Dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnej liczby całkowitej a niepodzielnej przez p zachodzi kongruencja

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

W rozwiązaniu użyjemy również kongruencji

$$(-1)^p \equiv -1 \pmod p \tag{3}$$

prawdziwej dla dowolnej liczby pierwszej p. Aby ją udowodnić, wystarczy zauważyć, że kongruencja ta jest równością dla p nieparzystego, natomiast dla $p=2$ przyjmuje postać $1 \equiv -1 \pmod 2$.

Przystępujemy do rozwiązania zadania. Gdy $p=3$, podana w zadaniu liczba jest podzielna przez 3 dla $n=3$.

Natomiast w przypadku $p \neq 3$, przyjmijmy $n=p-1$. Wówczas, korzystając kolejno: z kongruencji $p-1 \equiv -1 \pmod p$, z kongruencji (3) oraz z małego twierdzenia Fermata zastosowanego do $a=3$, otrzymujemy

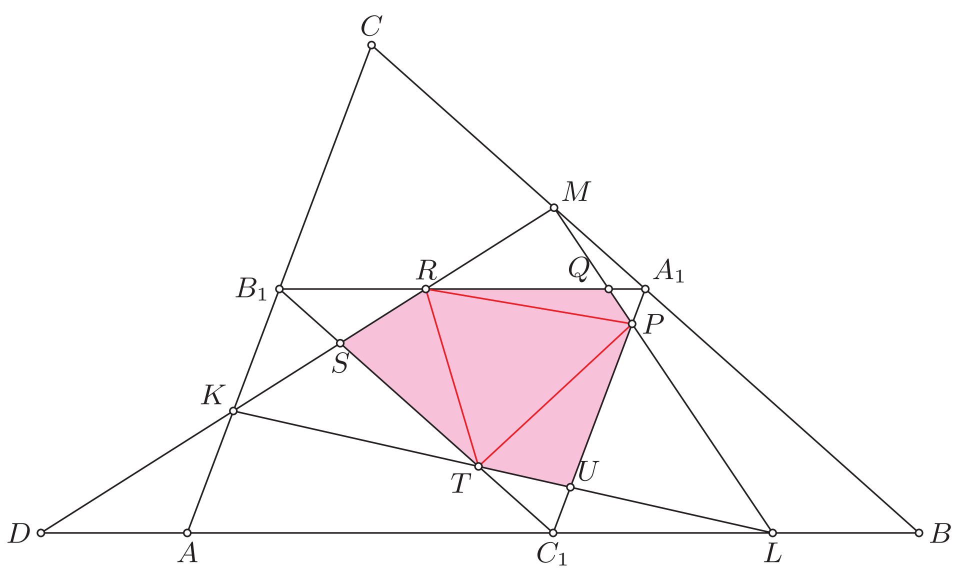
$$3^n + n^p = 3^{p-1} + (p-1)^p \equiv 3^{p-1} + (-1)^p \equiv 3^{p-1} - 1 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod p,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

---

49. *W trójkącie ABC o polu 1 punkty A_1, B_1, C_1 są odpowiednio środkami boków BC, CA i AB. Punkty K, L, M należą odpowiednio do odcinków AB_1, BC_1, CA_1. Wykaż, że pole części wspólnej trójkątów $A_1B_1C_1$ i KLM jest nie mniejsze niż $\frac{1}{8}$.*

Rozwiązanie



rys. 2

Załóżmy najpierw, że co najwyżej jeden z punktów K, L, M pokrywa się z punktem B_1, C_1 lub A_1 i oznaczmy wspólne punkty odpowiednich odcinków przez P, Q, R, S, T, U oraz D, jak na rysunku 2 (być może niektóre z nich się pokryją).

Ponieważ punkty A_1 i B_1 są środkami odpowiednio odcinków BC i CA, to proste A_1B_1 i AB są równoległe. Stąd i ze współliniowości odpowiednio M, R i D oraz M, A_1 i B wiemy, że istnieje jednokładność przekształcająca trójkąt MDB na trójkąt MRA_1. W tej jednokładności obrazem punktu L jest punkt Q. Skoro $LD \geqslant C_1A = C_1B \geqslant LB$, to analogiczna nierówność zachodzi dla obrazów odcinków LD i LB, czyli $QR \geqslant QA_1$.

Niech h oznacza odległość punktu P od prostej zawierającej punkty R, Q, A_1, natomiast $[\mathcal{F}]$ niech oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Na mocy udowodnionej powyżej nierówności $QR \geqslant QA_1$, uzyskujemy

$$[PQR] = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot h \geqslant \frac{1}{2} \cdot QA_1 \cdot h = [PQA_1].$$

Analogicznie możemy wykazać, że $[RST] \geqslant [RSB_1]$ oraz $[TUP] \geqslant [TUC_1]$.

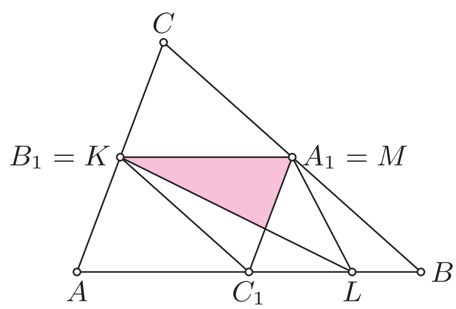
Korzystając z otrzymanych nierówności, dostajemy

$$2 \cdot [PQRSTU] = 2 \cdot [PQR] + 2 \cdot [RST] + 2 \cdot [TUP] + 2 \cdot [PRT] \geqslant$$

$$\geqslant [PQR] + [PQA_1] + [RST] + [RSB_1] + [TUP] + [TUC_1] + [PRT] = [A_1B_1C_1] = \frac{1}{4}[ABC] = \frac{1}{4},$$

co daje tezę w rozważanym przypadku.

Rozpatrzymy teraz przypadek, w którym co najmniej dwa z punktów K, L, M pokrywają się odpowiednio z punktami B_1, C_1, A_1. Bez straty ogólności przyjmijmy $K = B_1$ i $M = A_1$ (jak na rysunku 3). Wówczas część wspólna trójkątów $A_1B_1C_1$ i KLM zawiera część wspólną trójkątów $A_1B_1C_1$ i A_1B_1B, której pole wynosi $\frac{1}{4} \cdot [A_1B_1C_1B] = \frac{1}{8}$. W takim razie teza zadania jest spełniona również w tym przypadku, co kończy dowód.



rys. 3

---

50. *Wewnątrz kuli o promieniu 10 umieszczono 3803 odcinki o łącznej długości 3803. Udowodnij, że istnieje kula o promieniu 1, której wnętrze ma punkty wspólne z co najmniej sześcioma z tych odcinków.*

Rozwiązanie

Dla dowolnego odcinka rozważmy zbiór wszystkich punktów przestrzeni odległych od co najmniej jednego punktu tego odcinka o mniej niż 1 (nazwijmy go *otoczeniem* odcinka). Jednocześnie jest to zbiór wszystkich takich punktów O, że wnętrze kuli o środku O i promieniu 1 ma punkty wspólne z danym odcinkiem. Zbiór ten, dla odcinka o długości L, jest sumą walca o promieniu podstawy 1 i wysokości L oraz dwóch półkul o promieniu 1. Objętość takiej figury jest równa $L\pi + \frac{4}{3}\pi$.

Rozważmy teraz otoczenia wszystkich odcinków umieszczonych w danej kuli o promieniu 10. Suma ich objętości jest równa

$$V = D\pi + N \cdot \frac{4}{3}\pi,$$

gdzie N jest liczbą odcinków, a D sumą ich długości. Ponieważ zgodnie z warunkami zadania $N = D = 3803$, otrzymujemy

$$V = 3803\pi + 3803 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{26621}{3}\pi.$$

Zauważmy, że otoczenia mogą wprawdzie wystawać poza daną kulę, ale na odległość nie większą od 1. Zatem każde z tych otoczeń jest zawarte w kuli K o promieniu 11, współśrodkowej z daną kulą. Objętość kuli K jest równa

$$v = 11^3 \cdot \frac{4}{3}\pi = 1331 \cdot \frac{4}{3}\pi.$$

Z nierówności

$$V = \frac{26621}{3}\pi > \frac{26620}{3}\pi = 1331 \cdot \frac{20}{3}\pi = 5 \cdot 1331 \cdot \frac{4}{3}\pi = 5 \cdot v$$

wynika, że co najmniej jeden punkt kuli K należy do otoczeń co najmniej sześciu odcinków. Kula o środku w tym punkcie i promieniu 1 spełnia warunki zadania.

Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego