Zdalne seminaria olimpijskie dla nauczycieli

Na kółku OMJ. Matematyka ekstremalna.

(17–18 września 2021)

1. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Udowodnij, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego innego miasta.

2. **Twierdzenie Mantela.** W turnieju uczestniczy $2n$ graczy, każdych dwóch gra ze sobą co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trójka graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze, to łączna liczba rozegranych meczów nie przekracza n^2.

3. W każdej z trzech szkół uczy się n uczniów. Każdy uczeń ma w pozostałych szkołach co najmniej $n+1$ znajomych. Udowodnij, że z każdej szkoły można wybrać po jednym uczniu tak, że wszyscy wybrani uczniowie się znają.

4. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnij, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.

5. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów, z których każde trzy są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym nż 1. Wykazać, że ten zbiór jest zawarty w pewnym trójkącie o polu nie większym niż 4.

6. Dany jest pewien zbiór X punktów płaszczyzny. Każdy punkt zbioru X jest środkiem odcinka o końcach w zbiorze X. Udowodnij, że zbiór X jest nieskończony.

7. **Problem Sylvestera.** Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów o tej własności, że dowolna prosta przechodząca przez dwa punkty tego zbioru przechodzi jeszcze przez trzeci. Udowodnić, że wszystkie punkty z tego zbioru leżą na jednej prostej.

8. Na płaszczyźnie leży n punktów białych i n punktów czerwonych, żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że można narysować n odcinków o różnokolorowych końcach tak, że żadne dwa odcinki nie przecinają się.

9. **LVII OM/3/1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + a^3 \\ c^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

10. Wykazać, że nie istnieje liczba całkowita $n > 1$ taka, że $n \mid 2^n - 1$.