Konkurs Uczniowskich

Prac z Matematyki

Urok zbioru μ

Michał Miśkiewicz

Opiekun pracy:

dr Jerzy Bednarczuk

Warszawa 2010

Streszczenie

Tematem mojej pracy są punkty takie, że suma kwadratów odległości punktów z wcześniej ustalonego zbioru od prostej przechodzącej przez ów punkt jest niezależna od wyboru prostej. Dowodzę między innymi, że zawsze istnieje dokładnie jeden lub dwa takie punkty – w pierwszym przypadku jest to środek masy punktów obranego zbioru, w drugim punkty symetryczne względem środka masy. Prezentuję przykłady zastosowania tego twierdzenia i rozważam wybrane przypadki, w szczególności dla zbioru wierzchołków trójkąta.

1 Definicja i proste własności zbioru μ

Definicja. Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie. Weźmy punkt X taki, że dla każdej prostej k przechodzącej przez X suma kwadratów odległości punktów $A_1, \dots, A_n$ od k jest taka sama. Zbiór $\mu(\mathcal{A})$ definiujemy jako zbiór wszystkich punktów X spełniających powyższy warunek.

Z definicji wynikają natychmiast następujące wnioski:

Fakt 1. Suma kwadratów odległości jest taka sama dla każdej prostej przechodzącej przez każdy z punktów zbioru $\mu(\mathcal{A})$.

Dowód. Dla dowodu wystarczy pokazać, że rozważana suma ma tę samą wartość dla dwóch punktów $X, Y \in \mu(\mathcal{A})$ – jest to oczywiste, jeśli jako prostą k z definicji przyjmiemy prostą XY. $\square$

Fakt 2. Jeśli $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, $X \in \mu(\mathcal{A})$ i $X \in \mu(\mathcal{B})$, to $X \in \mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.

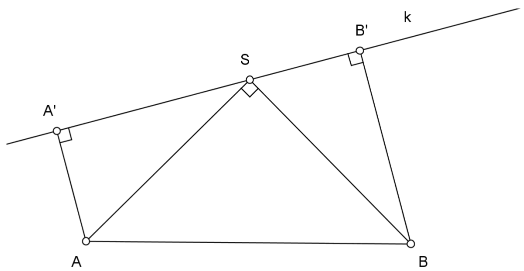
Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnej prostej k przechodzącej przez X zachodzi

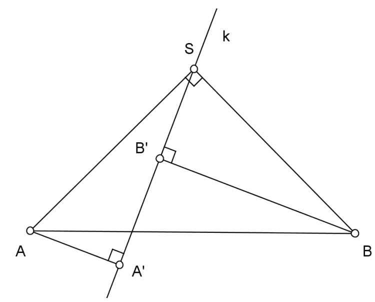
$$\sum_{P \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} |Pk|^2 = \sum_{P \in \mathcal{A}} |Pk|^2 + \sum_{P \in \mathcal{B}} |Pk|^2 \qquad \square$$

Zadanie 1. (I etap IV OMG)

Punkt S jest środkiem kwadratu $ABCD$. Wykaż, że $S \in \mu(\{A,B,C,D\})$.

Dowód. Ze względu na symetrię względem S (lub po uwzględnieniu faktu 2) stwierdzamy, że wystarczy wykazać, iż $S \in \mu(\{A,B\})$. W tym celu weźmy prostą k przechodzącą przez S. Niech A' i B' będą rzutami prostokątnymi odpowiednio A i B na k. Z prostego rachunku na kątach i równości $AS = BS$ otrzymujemy, że $\triangle AA'S \equiv \triangle SB'B$ (poniższe rysunki ilustrują dwa możliwe przypadki).





Stąd i z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $\triangle AA'S$ mamy, że rozważana suma to:

$$AA'^2 + BB'^2 = AA'^2 + SA'^2 = AS^2$$

Jest zatem niezależna od wyboru prostej k, co kończy dowód. $\square$

Otrzymany w powyższym zadaniu wynik ($S \in \mu(\{A,B\})$) razem z faktem 2 prowadzi do następującego wniosku:

Fakt 3. Niech $A'_1, \ldots, A'_n$ będą obrazami punktów odpowiednio $A_1, \ldots, A_n$ w obrocie o 90° wokół punktu X. Wówczas $X \in \mu(\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_n\})$.

2 Twierdzenie o zbiorze μ

Można zadać pytanie o liczność (w szczególności o niepustość) zbioru $\mu(\mathcal{A})$ w ogólnym przypadku, jak również o położenie punktów tego zbioru względem punktów zbioru $\mathcal{A}$. Odpowiedzi na te pytania dostarcza poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie, a S środkiem masy tych punktów. Wówczas $\mu(\mathcal{A}) = \{S\}$ lub do zbioru $\mu(\mathcal{A})$ należą dokładnie dwa punkty symetryczne względem S.

Dowód. Oznaczmy współrzędne punktów $A_1, \ldots, A_n$ odpowiednio przez $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Na początek zbadajmy, czy $(0,0) \in \mu(\mathcal{A})$. Weźmy dowolną prostą k przechodzącą przez punkt $(0,0)$ – jej równanie jest postaci $x \sin z + y \cos z = 0$ dla pewnego parametru z. Rozważana suma (oznaczmy ją przez $f(z)$) wynosi[1]:

$$f(z) = \sum |A_i k|^2 = \sum \left(\frac{|x_i \sin z + y_i \cos z|}{\sqrt{\sin^2 z + \cos^2 z}} \right)^2 = \sum (x_i \sin z + y_i \cos z)^2 =$$

$$= \sum (x_i^2 \sin^2 z + y_i^2 \cos^2 z + x_i y_i \sin 2z) = (\sin^2 z) \sum x_i^2 + (\cos^2 z) \sum y_i^2 + (\sin 2z) \sum x_i y_i$$

Zauważmy, że suma ta jest taka sama dla każdej prostej k wtedy i tylko wtedy gdy $f'(z)$ jest funkcją stale równą 0. Tymczasem:

$$f'(z) = (\sin 2z) \left(\sum x_i^2 - \sum y_i^2 \right) + 2(\cos 2z) \sum x_i y_i$$

Łatwo się przekonać (kładąc np. $z = 0$ i $z = \frac{\pi}{4}$), że $f' \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\sum x_i^2 = \sum y_i^2 \quad \text{i} \quad \sum x_i y_i = 0 \tag{1}$$

Aby zbadać, czy punkt (a, b) należy do $\mu(\mathcal{A})$, możemy przesunąć zbiór $\mathcal{A}$ o wektor $-[a, b]$ i sprawdzić, czy jego obraz spełnia warunek odpowiadający warunkowi (1). Ponieważ współrzędne obrazów punktów $A_1, \ldots, A_n$ to $(x_1 - a, y_1 - b), \ldots, (x_n - a, y_n - b)$, więc możemy stwierdzić, że $(a, b) \in \mu(\mathcal{A})$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\sum (x_i - a)^2 = \sum (y_i - b)^2 \quad \text{i} \quad \sum (x_i - a)(y_i - b) = 0 \tag{2}$$

W dalszej części dowodu skupimy się na rozwiązaniu tego układu równań.

[1] Wszystkie sumy indeksuję domyślnie od $i = 1$ do n.

Dygresja. Jeśli w n-wymiarowej przestrzeni oznaczymy $O = (0, \ldots, 0)$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\vec{u} = [1, \ldots, 1]$, to $(x_1 - a, \ldots, x_n - a) = X - a\vec{u}$ jest parametrycznym równaniem prostej przechodzącej przez X i równoległej do $\vec{u}$; analogicznie dla $(y_1 - b, \ldots, y_n - b)$. Oznaczmy te proste odpowiednio przez k i l – są one równoległe. Dodatkowo oznaczmy punkty $A = X - a\vec{u}$, $B = Y - b\vec{u}$. Geometryczną interpretacją warunku (2) jest wówczas $OA^2 = OB^2$ i $\vec{OA} \circ \vec{OB} = 0$. Ponieważ dwie proste równoległe i punkt wyznaczają przestrzeń co najwyżej trójwymiarową, więc znalezienie punktu (a, b) spełniającego (2) jest równoważne rozwiązaniu następującego problemu:

W przestrzeni trójwymiarowej dany jest punkt O oraz proste równoległe k i l. Znaleźć punkty $A \in k$ i $B \in l$ takie, że $OA = OB$ i $OA \perp OB$.

Dla uproszczenia dalszych obliczeń przyjmijmy układ współrzędnych o początku w środku masy punktów $A_1, \ldots, A_n$, czyli taki, w którym $\sum x_i = 0 = \sum y_i$. Przez proste przekształcenia otrzymujemy, że warunek (2) jest równoważny układowi równań:

$$\begin{cases} a^2 + \frac{1}{n} \sum x_i^2 = b^2 + \frac{1}{n} \sum y_i^2 \\ ab = -\frac{1}{n} \sum x_i y_i \end{cases} \tag{3}$$

Rozważmy teraz trzy przypadki:

1. Para $(a, b) = (0, 0)$ spełnia (3).

   Zachodzi wtedy $\sum x_i y_i = 0$ i $\sum x_i^2 = \sum y_i^2$, czyli układ równań przyjmuje postać:

   $$\begin{cases} a^2 = b^2 \\ ab = 0 \end{cases}$$

   Oczywiście nie ma on innego rozwiązania.

2. Zachodzi $\sum x_i y_i = 0$, ale $(0, 0)$ nie spełnia (3).

   Gdyby zachodziła równość $\sum x_i^2 = \sum y_i^2$, to wbrew założeniu $(0, 0)$ byłoby rozwiązaniem układu (3). Rozważmy więc przypadek, gdy $\sum x_i^2 > \sum y_i^2$. W takim wypadku łatwo wykazać, że układ (3) ma dwa rozwiązania $(0, b_0)$ i $(0, -b_0)$, gdzie $b_0^2 = \frac{1}{n}(\sum x_i^2 - \sum y_i^2)$. W przypadku przeciwnej nierówności jest analogicznie: rozwiązaniami są $(a_0, 0)$ i $(-a_0, 0)$, gdzie $a_0^2 = \frac{1}{n}(\sum y_i^2 - \sum x_i^2)$.

3. Zachodzi $\sum x_i y_i \neq 0$.

   Wówczas mnożąc pierwsze równanie przez a^2 i uwzględniając drugie, otrzymujemy równanie dwukwadratowe:

   $$a^4 + a^2 \cdot \frac{1}{n} \left(\sum x_i^2 - \sum y_i^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum x_i y_i \right)^2 = 0$$

Rozpatrywane jako równanie kwadratowe względem a^2 ma wyróżnik:

$$\Delta = \frac{1}{n^2}\left(\sum x_i^2 - \sum y_i^2\right)^2 + 4\left(\frac{1}{n}\sum x_i y_i\right)^2 > 0$$

Ma zatem dwa rozwiązania na a^2, przy czym ze wzoru Viete'a ich iloczyn wynosi $-(\frac{1}{n}\sum x_i y_i)^2 < 0$, zatem jedno z rozwiązań jest dodatnie i jedno ujemne. Równanie na a ma więc dokładnie dwa rozwiązania a_0 i $-a_0$ ($a_0 \neq 0$). Przyjmijmy $b_0 = -\frac{\sum x_i y_i}{n a_0}$. Pary (a_0, b_0) i $(-a_0, -b_0)$ w oczywisty sposób spełniają drugą równość układu (3). Po podzieleniu równania dwukwadratowego przez a_0^2 otrzymujemy, że spełniają także pierwszą. Oznacza to, że są one wszystkimi rozwiązaniami układu (3).

W każdym z przypadków teza twierdzenia jest spełniona, co kończy dowód. $\square$

Uwaga. W momencie, gdy dobraliśmy układ współrzędnych o początku w środku masy, mogliśmy dodatkowo wziąć taki, w którym suma $\sum x_i y_i$ jest równa 0. Wynika to z faktu, że jeśli w pewnym układzie suma ta jest równa M, to w układzie obróconym o $90°$ jest równa $-M$. Z ciągłości zmiany tej sumy przy obracaniu układu otrzymujemy, że istnieje układ o sumie równej 0. Pozwoliłoby to na ograniczenie się do rozważenia dwóch pierwszych przypadków, jednak formalizacja powyższej obserwacji byłaby uciążliwa.

Dowiedziemy teraz ważnego wniosku, który wynika z warunku (1) i znacznie upraszcza sprawdzanie, czy dany punkt należy do $\mu(\mathcal{A})$. Mówi on, że zamiast zgodnie z definicją sprawdzić równość sum dla wszystkich możliwych prostych, wystarczy sprawdzić dla trzech.

Wniosek. *Punkt X należy do zbioru $\mu(\mathcal{A})$ wtedy i tylko wtedy gdy dla trzech parami różnych prostych k przechodzących przez X suma kwadratów odległości punktów $A_1, \ldots, A_n$ od k jest taka sama.*

Dowód. Wynikanie w jedną stronę z definicji $\mu(\mathcal{A})$ jest oczywiste. Załóżmy więc, że suma kwadratów odległości jest taka sama dla trzech różnych prostych k przechodzących przez X. Weźmy układ współrzędnych, w którym $X = (0,0)$ i oś x pokrywa się z jedną z tych prostych. Mamy wówczas równość $f(0) = f(z_1) = f(z_2)$ dla pewnych różnych z_1, z_2 z przedziału $(0, \pi)$ (do takiego możemy się ograniczyć). Równość $f(0) = f(z_1)$ po użyciu jedynki trygonometrycznej i podzieleniu stronami przez $\sin z_1$ ($z_1 \in (0, \pi)$) daje:

$$(\sin z_1)\left(\sum y_i^2 - \sum x_i^2\right) = (\cos z_1)\cdot 2\sum x_i y_i$$

Zauważmy, że jeśli $\sum x_i y_i = 0$, to również $\sum y_i^2 - \sum x_i^2 = 0$, co dowodzi tezy (warunek (1)).

Przypuśćmy więc, że $\sum x_i y_i \neq 0$. Wtedy zachodzi:

$$\operatorname{ctg} z_1 = \frac{\sum y_i^2 - \sum x_i^2}{2\sum x_i y_i}$$

Z analogicznej równości dla z_2 wynika, że $\operatorname{ctg} z_1 = \operatorname{ctg} z_2$, co razem z różnowartościowością funkcji $\operatorname{ctg} z$ w przedziale $(0, \pi)$ daje $z_1 = z_2$. Otrzymana sprzeczność z warunkiem $z_1 \neq z_2$ dowodzi prawdziwości tezy. $\square$

Uwaga. Łatwo zauważyć, że postawionego warunku nie da się poprawić; inaczej mówiąc, nie jest prawdziwe analogiczne twierdzenie dla dwóch prostych. Na przykład jeśli punkt C leży na dwusiecznej kąta AOB, to kwadraty odległości punktu C od prostych OA i OB są takie same, ale oczywiście punkt O nie należy do $\mu(\{C\})$ – wystarczy wziąć prostą OC.

3 Przykłady użycia tego twierdzenia

Twierdzenie 1 daje wiele narzędzi do badania zbioru μ. Poniższe przykłady pokazują, w jaki sposób można z nich korzystać.

Przykład 1. Zbadajmy zbiór $\mu(\{A, B, C, D\})$, gdzie $ABCD$ jest rombem o kątach $60°$ i $120°$, czyli składającym się z dwóch trójkątów równobocznych. Przyjmijmy $AC > BD$.
Sposób I. Stosunek długości przekątnych tego rombu wynosi $\sqrt{3}$. Możemy więc obrać układ współrzędnych, w którym:

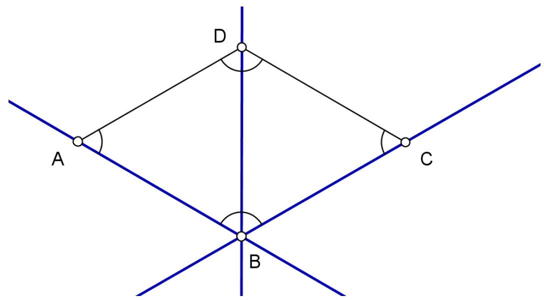
$$A = (-\sqrt{3}, 0),\ B = (0, -1),\ C = (\sqrt{3}, 0),\ D = (0, 1)$$

Wówczas środek masy rombu to punkt $(0, 0)$. Rozwiążmy odpowiednik układu równań (3) z twierdzenia 1. Dla powyższych danych ma on postać:

$$a^2 + \frac{3}{2} = b^2 + \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad ab = 0$$

Oczywiście rozwiązaniami są pary $(0, 1)$ i $(0, -1)$. Otrzymaliśmy zatem, że $\mu(\{A, B, C, D\}) = \{B, D\}$.

Sposób II. Przez h oznaczmy wysokość trójkąta równobocznego ABD. Wówczas odległości $\mathrm{d}(A, BD)$, $\mathrm{d}(A, BC)$, $\mathrm{d}(C, BD)$, $\mathrm{d}(C, AB)$, $\mathrm{d}(D, AB)$, $\mathrm{d}(D, BC)$ są równe h. W związku z tym sumy kwadratów odległości wierzchołków rombu od prostych BA, BC, BD są równe $2h^2$. Zgodnie z wnioskiem z twierdzenia 1 oznacza to, że $B \in \mu(\{A, B, C, D\})$. Po uwzględnieniu tezy twierdzenia 1 otrzymujemy tak jak poprzednio $\mu(\{A, B, C, D\}) = \{B, D\}$.



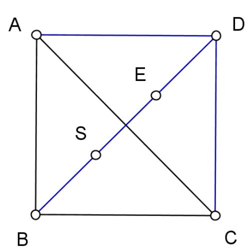
Przykład 2. Tym razem weźmy trójkąt prostokątny równoramienny ABC z kątem prostym przy wierzchołku B i zastanówmy się nad $\mu(\{A, B, C\})$.

Sposób I. Przyjmijmy $A = (0, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$. Rozwiążmy odpowiednik układu równań (2) z twierdzenia 1. Po podstawieniu danych i uproszczeniu jest to:

$$a^2 = b^2 \quad \text{i} \quad 3ab = a + b$$

Rozwiązując, otrzymujemy punkty $(0, 0)$ i $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Sposób II. Niech D będzie punktem takim, że $ABCD$ jest kwadratem. Niech S i E będą punktami na prostej AD takimi, że $\vec{AS} = \vec{SE} = \vec{ED}$, czyli dzielącymi odcinek AD na trzy przystające. Z zadania 1 wiemy, że $B \in \mu(\{A, B, C\})$. S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC oraz punkty B i E są symetryczne względem S, więc z twierdzenia 1 $\mu(\{A, B, C\}) = \{B, E\}$.



Twierdzenie 1 pozwala także na łatwe uogólnienie tezy zadania 1 na dowolny wielokąt foremny. Poniższe zadanie z pewnością posiada wiele rozwiązań, ale te przytoczone są wyjątkowo proste.

Zadanie 2.

Zbiór $\mathcal{A} = \{A_1,\ A_2, \ldots, A_n\}$ jest zbiorem wierzchołków n-kąta foremnego o środku S. Wykazać, że $S \in \mu(\mathcal{A})$.

Dowód. Przypuśćmy, że teza zadania nie jest prawdziwa. Wówczas istnieje punkt $X \neq S$ należący do $\mu(\mathcal{A})$. Każdy obrót wokół S o wielokrotność kąta $\frac{2\pi}{n}$ przekształca zbiór $\mathcal{A}$ na siebie, a więc punkt X przekształca na punkt należący do $\mu(\mathcal{A})$. Ponieważ przez takie obroty otrzymujemy n parami różnych punktów, więc zbiór $\mu(\mathcal{A})$ jest co najmniej n-elementowy ($n \geq 3$). Jednocześnie zgodnie z twierdzeniem 1 jest co najwyżej dwuelementowy, co prowadzi do sprzeczności. □

Inne rozwiązanie. Ze względu na wspomnianą symetrię suma kwadratów odległości punktów zbioru $\mathcal{A}$ od prostych $SA_1,\ SA_2,\ SA_3$ jest taka sama. Dla wielokątów foremnych innych niż kwadrat są to proste parami różne, co na mocy wniosku z twierdzenia 1 daje tezę.

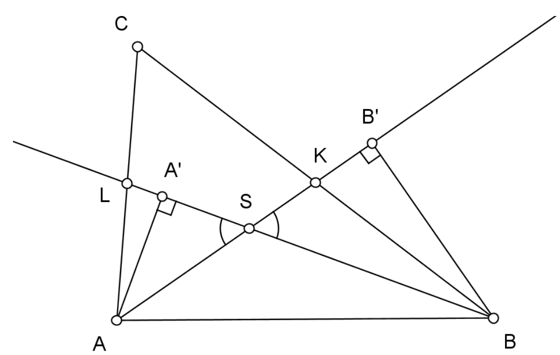
4 Zbiór μ dla wierzchołków trójkąta

Na podstawie rozważań w twierdzeniu 1 można podejrzewać, że przypadek, gdy środek masy zbioru $\mathcal{A}$ należy do $\mu(\mathcal{A})$, jest dość szczególny. Zbadamy to na przykładzie trójkąta[2]. Wykazaliśmy już, że wspomniany przypadek zachodzi dla trójkąta równobocznego – okazuje się, że tylko dla niego.

Twierdzenie 2.
Niech S będzie środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wówczas $S \in \mu(\{A, B, C\})$ wtedy i tylko wtedy gdy trójkąt ABC jest równoboczny.

Dowód. Dowód w jedną stronę został już przeprowadzony w ramach zadania 2. Przeprowadźmy więc rozumowanie w drugą stronę – załóżmy, że $S \in \mu(\{A, B, C\})$.

Oznaczmy przez A' i B' rzuty prostokątne punktów A i B na środkowe BL i AK odpowiednio. Oczywiście $\mathrm{d}(C, BL) = AA'$ i $\mathrm{d}(C, AK) = BB'$. Ponieważ $S \in \mu(\{A, B, C\})$, więc sumy kwadratów odległości punktów A, B, C od prostych AK i BL są równe. Oznacza to, że $2AA'^2 = 2BB'^2$, czyli $AA' = BB'$. Razem z równościami kątów $\sphericalangle AA'S = 90° = \sphericalangle BB'S$ i $\sphericalangle ASA' = \sphericalangle BSB'$ (kąty wierzchołkowe) oznacza to przystawanie trójkątów $\triangle AA'S$ i $\triangle BB'S$. Stąd z kolei wynika równość $AS = BS$ i w konsekwencji $KS = LS$ ($\frac{AS}{KS} = 2 = \frac{BS}{LS}$). Te dwie równości razem ze wspomnianą wcześniej równością kątów $\sphericalangle ASL$ i $\sphericalangle BSK$ dają $\triangle ASL \equiv \triangle BSK$. Z tego przystawania wynika równość $AL = BK$, czyli $AC = BC$.



Analogicznie otrzymujemy równość $AB = BC$. Trójkąt ABC ma zatem boki równej długości, co dowodzi tezy. $\square$

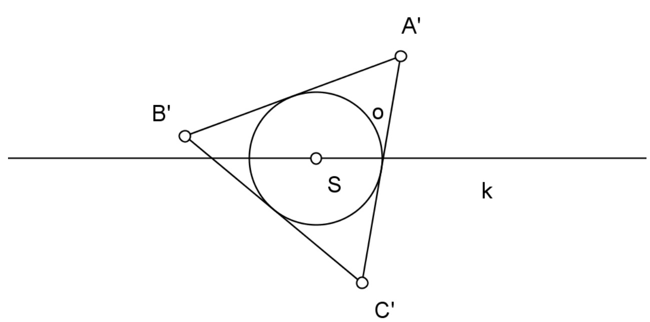
[2] W następnym punkcie także w ogólnym przypadku.

Skoro dla trójkąta nierównobocznego $\mu(\{A,B,C\})$ zawsze jest dwuelementowy, to warto zbadać możliwe geometryczne powiązania punktów tego zbioru z trójkątem ABC. Poniższe twierdzenie dowodzi interesującego związku z ogniskami pewnej elipsy wpisanej w ten trójkąt.

Twierdzenie 3.
Niech S będzie środkiem ciężkości trójkąta nierównobocznego ABC, $\mu(\{A,B,C\}) = \{P,Q\}$, ponadto niech F i G będą ogniskami elipsy o środku S wpisanej w trójkąt ABC. Wówczas czworokąt $FQGP$ jest rombem o stosunku przekątnych $\frac{PQ}{FG} = \sqrt{2}$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla dowolnego trójkąta ABC istnieje elipsa weń wpisana o środku w środku ciężkości trójkąta. W tym celu weźmy dowolny trójkąt równoboczny $A'B'C'$ i przekształcenie afiniczne przekształcające $A'B'C'$ na ABC. Przeprowadza ono okrąg wpisany w trójkąt $A'B'C'$ na elipsę wpisaną w trójkąt ABC. Przekształcenia afiniczne zachowują środek elipsy i środek ciężkości trójkąta, więc środkiem otrzymanej elipsy jest środek ciężkości trójkąta ABC. Ponadto gdy trójkąt ABC nie jest równoboczny, elipsa ta nie jest okręgiem. Można również łatwo wykazać, że istnieje dokładnie jedna taka elipsa.

Niech e będzie tą elipsą, a k symetralną odcinka FG. Przez powinowactwo prostokątne g o osi k i odpowiedniej skali (z przedziału $(0,1)$) możemy przekształcić elipsę e na okrąg – oznaczmy go o. Niech $A'B'C'$ będzie obrazem trójkąta ABC przy tym powinowactwie. Okrąg o jest wpisany w $A'B'C'$. Oczywiście $S \in k$, więc obrazem punktu S jest on sam. W związku z tym punkt S jest jednocześnie środkiem ciężkości trójkąta $A'B'C'$ (przekształcenia afiniczne zachowują środek ciężkości) oraz środkiem okręgu weń wpisanego (zachowują też środek elipsy), więc trójkąt $A'B'C'$ jest równoboczny.



Przyjmijmy układ współrzędnych, w którym oś x pokrywa się z prostą k, $S = (0,0)$ oraz okrąg o ma promień 1. Oznaczmy $A' = (x_1, y_1)$, $B' = (x_2, y_2)$, $C' = (x_3, y_3)$. Z prostych rachunków wynika, że boki trójkąta $A'B'C'$ są równe $2\sqrt{3}$. Z tezy zadania 2 dla trójkąta równobocznego wynika, że $S \in \mu(\{A', B', C'\})$, więc z definicji zbioru μ wielkości $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ i $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ jako sumy kwadratów odległości A', B', C' od osi układu są równe sumie kwadratów odległości od dowolnej prostej przechodzącej przez S. Dla prostej $A'S$ łatwo obliczamy, że suma ta wynosi 6, więc:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \tag{4}$$

Ponadto korzystając z warunku (1) z twierdzenia 1, otrzymujemy:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 \tag{5}$$

Weźmy teraz przekształcenie afiniczne odwrotne do powinowactwa g. Jest to powinowactwo prostokątne o osi k i skali $\alpha > 1$. Przekształca ono punkt (x, y) na $(x, \alpha y)$, więc $A = (x_1, \alpha y_1)$, $B = (x_2, \alpha y_2)$, $C = (x_3, \alpha y_3)$.

Rozwiążemy dla punktów A, B, C układ odpowiedni do układu (3) z twierdzenia 1. Na początek zauważmy, że zgodnie z równościami (4) i (5):

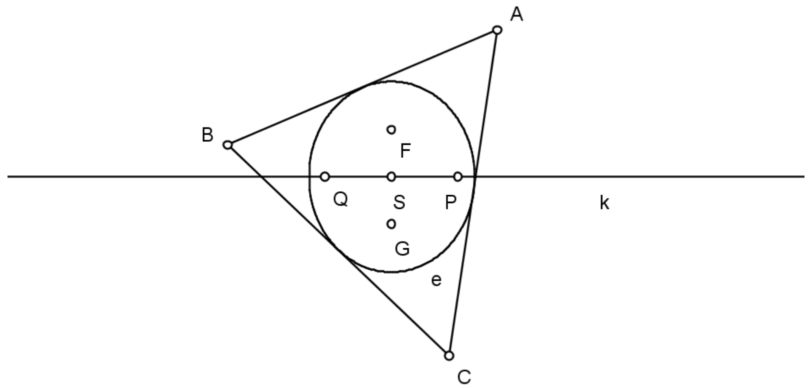
$$\frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \frac{6}{3} = 2,$$
$$\frac{1}{3}\left((\alpha y_1)^2 + (\alpha y_2)^2 + (\alpha y_3)^2\right) = \frac{\alpha^2}{3}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = \frac{6\alpha^2}{3} = 2\alpha^2,$$
$$-\frac{1}{3}(x_1 \cdot \alpha y_1 + x_2 \cdot \alpha y_2 + x_3 \cdot \alpha y_3) = -\frac{\alpha}{3}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) = 0$$

Rozwiązywany układ równań przyjmuje więc postać:

$$a^2 + 2 = b^2 + 2\alpha^2 \quad \text{i} \quad ab = 0$$

W związku z tym, że $\alpha > 1$, rozwiązaniami są $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha^2 - 1}, 0)$ i $(-\sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha^2 - 1}, 0)$. Są to punkty zbioru $\mu(\{A, B, C\})$, czyli punkty P i Q.

Łatwo zauważyć, że elipsa e ma półosie długości 1 i α. Stąd wynika, że odległość między jej środkiem a ogniskiem jest równa $\sqrt{\alpha^2-1}$. Dlatego ogniska F i G to punkty $(0, \sqrt{\alpha^2-1})$ i $(0, -\sqrt{\alpha^2-1})$.



Punkty P, Q, F, G o wyznaczonych wyżej współrzędnych spełniają tezę, co kończy dowód. □

5 Własności zbiorów $\mathcal{A}$ takich, że $|\mu(\mathcal{A})| = 1$

Wróćmy do problemu postawionego na początku poprzedniego punktu. Wyniki poszukiwań ogólnych warunków na zbiory $\mathcal{A}$ takie, że $|\mu(\mathcal{A})| = 1$, przedstawione są poniżej.

Twierdzenie 4.
Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie, a A_k jednym z tych punktów. Oznaczmy zbiór $\mathcal{A}_k = \mathcal{A} \backslash \{A_k\}$ oraz punkt S_k – środek masy zbioru $\mathcal{A}_k$. Wówczas $|\mu(\mathcal{A})| = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $J^{\alpha}_{S_k}(A_k) \in \mu(\mathcal{A}_k)$, gdzie $\alpha = \sqrt{\frac{1}{n}}$.

Dowód. Przyjmijmy układ współrzędnych o początku w S_k, niech $A_1 = (x_1, y_1), \ldots, A_n = (x_n, y_n)$. Mamy wówczas:

$$\sum_{i \neq k} x_i = 0 = \sum_{i \neq k} y_i$$

Środkiem masy zbioru $\mathcal{A}$ jest zatem punkt $(\frac{1}{n}\sum x_i, \frac{1}{n}\sum y_i) = (\frac{x_k}{n}, \frac{y_k}{n})$. Na mocy twierdzenia 1 równość $|\mu(\mathcal{A})| = 1$ jest równoważna temu, że punkt ten spełnia warunek (2) z tegoż twierdzenia. Przez równoważne przekształcenia otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} \sum(\frac{x_k}{n} - x_i)^2 = \sum(\frac{y_k}{n} - y_i)^2 \\ \sum(\frac{x_k}{n} - x_i)(\frac{y_k}{n} - y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \cdot (\frac{x_k}{n})^2 - 2 \cdot \frac{x_k}{n} \cdot \sum x_i + \sum x_i^2 = n \cdot (\frac{y_k}{n})^2 - 2 \cdot \frac{y_k}{n} \cdot \sum y_i + \sum y_i^2 \\ n \cdot \frac{x_k}{n} \cdot \frac{y_k}{n} - \frac{x_k}{n} \cdot \sum y_i - \frac{y_k}{n} \cdot \sum x_i + \sum x_i y_i = 0 \end{cases}$$

Po skorzystaniu z warunku $\sum_{i \neq k} x_i = 0 = \sum_{i \neq k} y_i$:

$$\begin{cases} \frac{x_k^2}{n} - \frac{2x_k}{n} \cdot x_k + x_k^2 + \sum_{i \neq k} x_i^2 = \frac{y_k^2}{n} - \frac{2y_k}{n} \cdot y_k + y_k^2 + \sum_{i \neq k} y_i^2 \\ \frac{x_k y_k}{n} - \frac{x_k}{n} \cdot y_k - \frac{y_k}{n} \cdot x_k + x_k y_k + \sum_{i \neq k} x_i y_i = 0 \end{cases}$$

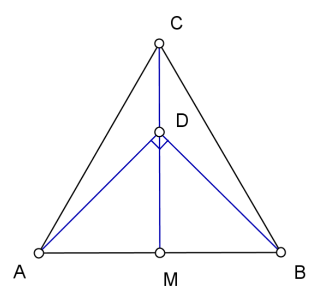
$$\begin{cases} (\frac{x_k}{\sqrt{n}})^2 + \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq k} x_i^2 = (\frac{y_k}{\sqrt{n}})^2 + \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq k} y_i^2 \\ \frac{x_k}{\sqrt{n}} \cdot \frac{y_k}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{n-1} \sum_{i \neq k} x_i y_i \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ odpowiadający układowi (3) z twierdzenia 1 – jest on równoważny temu, że $(\frac{x_k}{\sqrt{n}}, \frac{y_k}{\sqrt{n}}) \in \mu(\mathcal{A}_k)$ (punkt $(0,0)$ jest środkiem masy zbioru $\mathcal{A}_k$). Oczywiście jest to równoważne drugiemu warunkowi twierdzenia, co kończy dowód. $\square$

Przykład 3. Pokażemy, jak z twierdzenia 4 w prosty sposób wynika twierdzenie 2. Weźmy trójkąt ABC o środku ciężkości S należącym do $\mu(\{A,B,C\})$. Niech M będzie środkiem odcinka AB – jest to środek masy zbioru $\{A,B\}$. Skoro $S \in \mu(\{A,B,C\})$, to zgodnie z tezą twierdzenia 4 dla zbioru $\{A,B,C\}$, $n=3$ i wyróżnionego wierzchołka C otrzymujemy, że punkt $D = J_M^\alpha(C)$ należy do zbioru $\mu(\{A,B\})$, gdzie $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Otrzymany w zadaniu 1 wynik dotyczący zbioru $\mu(\{A,B\})$ razem z tezą twierdzenia 1 prowadzi do wniosku, że trójkąt ABD jest trójkątem prostokątnym równoramiennym z kątem prostym przy wierzchołku D. Trójkąt ABC jest więc trójkątem równoramiennym o podstawie AB i środkowej długości:

$$CM = DM\sqrt{3} = AB\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trójkąt ABC jest więc równoboczny.



6 Minimalna suma kwadratów odległości

Postawmy teraz problem pozornie niezwiązany bezpośrednio z dotychczasowymi rozważaniami – zastanówmy się, dla jakiej prostej suma kwadratów odległości ustalonych punktów od tej prostej jest minimalna. Jest to znany problem, ale istnieje związek z szukaną prostą a punktami zbioru μ. Ponadto rozwiązywalność tego problemu jest zależna od liczności zbioru μ.

Twierdzenie 5.
Niech $\mathcal{A}$ będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie takim, że $\mu(\mathcal{A}) = \{P, Q\}$. Dla prostej k przez $s(k)$ oznaczmy sumę kwadratów odległości punktów zbioru $\mathcal{A}$ od prostej k. Wówczas symetralna odcinka PQ jest jedyną prostą, dla której funkcja s przyjmuje wartość minimalną.

Dowód. Niech S będzie środkiem masy zbioru $\mathcal{A}$, oznaczmy ponadto $n = |\mathcal{A}|$. Weźmy dowolną prostą k nieprzechodzącą przez S. Niech k' będzie prostą równoległą do k i przechodzącą przez S, a d odległością między prostymi k i k'. Wówczas z twierdzenia Steinera $s(k) = s(k') + nd^2 > s(k')$ $(d \neq 0)$. Oznacza to, że poszukiwania minimum możemy ograniczyć do prostych przechodzących przez S.

Niech l będzie symetralną odcinka PQ (oczywiście $S \in l$) oraz niech $d = SP$. Oznaczmy przez M wartość $s(m)$ dla każdej prostej m przechodzącej przez P – stałość tej sumy wynika z określenia punktu P. Weźmy dowolną prostą k przechodzącą przez S. Kąt między prostymi k i l oznaczmy przez α. Niech k' będzie prostą równoległą do k i przechodzącą przez P. Odległość między prostymi k i k' to $d \cos\alpha$. Z twierdzenia Steinera otrzymujemy $s(k) = s(k') - n(d\cos\alpha)^2 = M - nd^2\cos^2\alpha \geq M - nd^2 = s(l)$, przy czym równość zachodzi tylko dla $\cos^2\alpha = 1$ $(d \neq 0)$, czyli dla $k = l$, co kończy dowód. $\square$

Uwagi. W ten sam sposób możemy otrzymać, że $s(PQ)$ jest maksymalną wartością s dla wszystkich prostych przechodzących przez S. Ponadto w przypadku $\mu(\mathcal{A}) = \{S\}$ minimalna wartość jest przyjmowana dla każdej prostej przechodzącej przez S.

Połączenie tez twierdzeń 3 i 5 daje następujący wniosek:

Fakt 4. Dany jest trójkąt nierównoboczny ABC. Środek wpisanej weń elipsy e pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta ABC. Wówczas wielka oś elipsy e wyznacza jedyną prostą taką, że suma kwadratów odległości punktów A, B, C od tej prostej jest minimalna.

7 Perspektywy rozwoju

Przedstawiony problem jest otwarty. Poza podaniem kolejnych przykładów oraz udowodnieniem nowych własności można zastanowić się nad pewnymi uogólnieniami.

- Można zauważyć, że w rozumowaniu z twierdzenia 1 nic się nie zmieni, jeśli punktom zbioru $\mathcal{A}$ przypiszemy różne masy.
- Rozważania można próbować rozszerzyć na nieskończone zbiory punktów $\mathcal{A}$. Wymagałoby to zmiany definicji i zapewne użycia bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego.
- Podobny do przedstawionego problem można postawić dla zbioru $\mathcal{A}$ w przestrzeni trójwymiarowej. Zachodzą tu dwie możliwości – odpowiednikiem prostej k z definicji może być płaszczyzna lub prosta. Łatwo zauważyć, że jeśli zbiory zdefiniowane w tych przypadkach oznaczymy odpowiednio $\mu_1(\mathcal{A})$ i $\mu_2(\mathcal{A})$, to $\mu_1(\mathcal{A}) \subseteq \mu_2(\mathcal{A})$. Widać więc, że istnieje między tymi definicjami ścisłe powiązanie.
- Jeśli połączyć wszystkie te uogólnienia, można zastanowić się nad fizyczną interpretacją problemu i potencjalnym praktycznym zastosowaniem – suma kwadratów odległości punktów ciała od prostej nosi nazwę momentu bezwładności i pełni ważną rolę w dynamice ruchu obrotowego.

8 Literatura

1. Jerzy Bednarczuk *Urok przekształceń afinicznych*, Warszawa 1978.