Teoria

Przy rozwiązaniu poniższych zadań będziemy korzystać z najprostszych narzędzi:

- jeśli $x > y > 0$ oraz $a > 0$, to $\frac{a}{y} > \frac{a}{x}$;
- jeśli $b > a > 0$ oraz $x > 0$, to $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$;
- jeśli $a > 1$ oraz $x > y$, to $a^x > a^y$;
- jeśli $0 < a < 1$ oraz $x > y$, to $a^x < a^y$.

Zadania

1. Która z liczb jest większa:
$$(10^{10})! \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{11}}?$$

2. [Obóz] Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} < \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}.$$

3. [ŚKM] Udowodnij, że
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010} < \frac{3}{8}.$$

4. [Matex] Wykaż, że jeżeli $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$, to
$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{a_3+a_6} < 3.$$

5. [ŚKM] Danych jest 2013 liczb rzeczywistych $l_1, l_2, \ldots, l_{2013}$, które spełniają warunek
$$l_1 < l_2 < \ldots < l_{2013}.$$
Wykaż, że
$$\frac{l_1+l_2+\ldots+l_{2013}}{2013} > \frac{l_1+l_2+\ldots+l_{2012}}{2012}.$$

---

6. [Obóz] Dane są liczby rzeczywiste $a \geqslant 1$, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$. Wykaż, że $abc \geqslant a+b+c$.

7. [OMJ] Dodatnie liczby a, b, c są nie większe od 2. Udowodnij, że
$$a+b+c+2 \geqslant abc.$$

8. [ŚKM] Wykaż, że dla dowolnych i różnych nieparzystych liczb naturalnych a, b, c, d prawdziwa jest nierówność
$$abc+abd+acd+bcd+139 \leqslant 3abcd.$$

9. [ŚKM] Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c należących do przedziału $\langle 0, 77\rangle$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{abc}{a+b+c} < 2017.$$

---

10. [OMJ] Liczby a, b, c są dodatnie. Wykaż, że

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1.$$

11. [OMJ] Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie i mniejsze od 1, to

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + 1 > 3ab.$$

12. [Matex] Wykaż, że jeśli liczba a jest większa od 1, to

$$a + 2a^2 + 3a^3 < 6a^6.$$

13. [Matex] Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b^2}} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

14. [ŚKM] Wykaż, że jeżeli x, y są liczbami dodatnimi, to prawdziwe są nierówności

$$\frac{x}{y+\max\{x,y\}} + \frac{y}{x+\max\{x,y\}} \leqslant 1 \leqslant \frac{x}{y+\min\{x,y\}} + \frac{y}{x+\min\{x,y\}}.$$

---

15. [Obóz] Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb a i b zachodzi nierówność

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+a} \geqslant \frac{1}{2}.$$

16. [Obóz] Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c oraz d zachodzi nierówność

$$\frac{a}{3a+b} + \frac{b}{3b+c} + \frac{c}{3c+d} + \frac{d}{3d+a} \geqslant \frac{1}{3}.$$

17. [OMJ] Udowodnij, że dla każdych dodatnich liczb a, b, c spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} > \sqrt{a+b+c}.$$

18. [Obóz] Liczby dodatnie a, b, c spełniają równość $a+b+c=1$. Wykaż, że

$$\frac{ab+c}{(a+c)(b+c)} + \frac{bc+a}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac+b}{(a+b)(b+c)} \geqslant 3.$$

---

19. [ŚKM] Rozstrzygnij, czy istnieje taki trójkąt o bokach długości a, b, c, że

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2.$$

20. [ŚKM] Udowodnij, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to prawdziwa jest nierówność
$$2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2.$$

21. [ŚKM] Dany jest zbiór $\{a, b, c, d\}$ takich czterech dodatnich liczb rzeczywistych, że każde trzy z nich są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że spełniona jest nierówność
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} < 3.$$

22. [ŚKM] Punkt P ($A \neq P \neq B$) leży na boku BC danego trójkąta ABC. Niech r, r_1, r_2 oznaczają promienie okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio ABC, APC, BPC. Wykaż, że
$$r < \frac{r_1 + r_2}{2} + \max\{r_1, r_2\}.$$

Literatura

[Obóz] Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów

[OMJ] Olimpiada Matematyczna Juniorów (lub wcześniej Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów)

[Matex] Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych w XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

[ŚKM] Śląski Konkurs Matematyczny dla licealistów