Zdalne seminarium OMJ
dla nauczycieli matematyki
Platforma Zoom — 22, 23 maja 2020 r.

Tomasz Szymczyk

Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

O nierównościach

1. (XVI OM, I) Dowieść, że jeżeli $p>0$, $q>0$, $pq=1$, to $\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\geqslant 4$.

2. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność
$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

3. (XVI OM, I) Dowieść, że dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność
$$a^2bc+ab^2c+abc^2\leqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

4. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, …, x_n spełniona jest nierówność
$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\geqslant x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1.$$

5. (II OM, III) Wykazać, że jeśli $a>0$, $b>0$, $c>0$, to zachodzi nierówność
$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geqslant 6abc.$$

6. (XIV OM, I) Wykazać, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to
$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a+b+c}\geqslant abc.$$

7. Wykazać, że dla dodatnich liczb a, b, c spełniona jest nierówność
$$\frac{a^4+b^4+c^4}{4abc}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant\frac{5}{4}(a+b+c).$$

8. (XLIV OM, II) Dowieść, że dla dodatnich x, y, u, v zachodzi nierówność
$$\frac{xy+yu+uv+vx}{x+y+u+v}\geqslant\frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}.$$

9. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 prawdziwe są nierówności:

a) $(x_1y_1+x_2y_2)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$,

b) $(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$.

10. Wykazać, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwe są nierówności

a) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,

b) $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

11. Wykazać, że dla dodatnich liczb x_1, x_2, …, x_n prawdziwa jest nierówność
$$(x_1+x_2+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2.$$

12. Wykazać, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, ..., a_n zachodzi zależność

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\,.$$

Jest to nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową.

13. (XXXIV OM, II) Dane są takie trzy liczby nieujemne a, b, c, że suma każdych dwóch jest nie mniejsza od trzeciej. Dowieść, że

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a-b+c}+\sqrt{-a+b+c} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\,.$$

14. Wykazać, że jeśli a, b, c są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi i $a+b+c=8$, to spełniona jest nierówność

$$\sqrt{5a+b}+\sqrt{5b+c}+\sqrt{5c+a} \leqslant 12.$$

15. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają układ nierówności

$$\begin{cases} \dfrac{2ab}{a+b} \geqslant a+b-c \\[2mm] \dfrac{2bc}{b+c} \geqslant b+c-a \\[2mm] \dfrac{2ca}{c+a} \geqslant c+a-b. \end{cases}$$

Wykazać, że $a=b=c$.

Źródła:

[1] Aleksander Kubica, Tomasz Szymczyk, *Nierówności dla początkujących olimpijczyków.* Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej, Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, Warszawa 2014

[2] Tomasz Szymczyk, *Nierówność Schwarza* w: *II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów.* Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej, Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, Warszawa 2009

[3] Bolesław Mokrski, Józef Siwy, Tomasz Szymczyk, *Matematyczny sezam.* Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2018

[4] Maciej Bryński, *Olimpiady Matematyczne, t. 7.* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1995

[5] Izrael Siwaszinski, *Nierówności w zadaniach.* Wydawnictwo „Nauka", Moskwa 1967 (po rosyjsku)

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej