

Równe zero

Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
10-11.09.2021 r.

Zadanie 1 (II OMG, III etap). Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} ab = a + b \\ bc = b + c \\ ca = c + a \end{cases}.$$

Zadanie 2 (Facebookowa Liga OMG, edycja 2013/14). Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d) = (a + d)(b + c).$$

Udowodnij, że co najmniej trzy z liczb a, b, c, d są równe.

Zadanie 3. Liczba rzeczywista x oraz liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek

$$\frac{x - a - b}{c} + \frac{x - b - c}{a} + \frac{x - c - a}{b} = 3.$$

Wykaż, że $x = a + b + c$.

Zadanie 4 (XIV OMJ, I etap). Liczby całkowite a, b, c są różne od 0 i spełniają zależność

$$\frac{a}{b + c^2} = \frac{a + c^2}{b}.$$

Wykaż, że $a + b + c \leq 0$.

Zadanie 5. Pokaż, że jeśli liczby rzeczywiste x, y, z, a, b, c spełniają układ równań:

$$\begin{cases} (z - x)(x - y) = a \\ (x - y)(y - z) = b \\ (y - z)(z - x) = c \end{cases},$$

to $ab + bc + ca = 0$.

Zadanie 6. Zamieniono kolejność liczb $1, 2, \dots, n$ uzyskując ciąg liczb a_1, a_2, \dots, a_n . Wykaż, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to iloczyn

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_n - n)$$

jest liczbą parzystą.

Zadanie 7 (Gazetka OMJ „Kwadrat” nr 5). Dana jest liczba pierwsza p . Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}.$$

Zadanie 8. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ będą takie, że

$$\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \dots + \epsilon_n \epsilon_1 = 0.$$

Pokaż, że n jest liczbą podzielną przez 4.

Zadanie 9. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n , które są równe sumie swoich cyfr powiększonej o iloczyn swoich cyfr.

Zadanie 10. Niech a, b, c będą niezerowymi liczbami całkowitymi, przy czym $a \neq c$, spełniającymi warunek

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}.$$

Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2$ nie jest liczbą pierwszą.