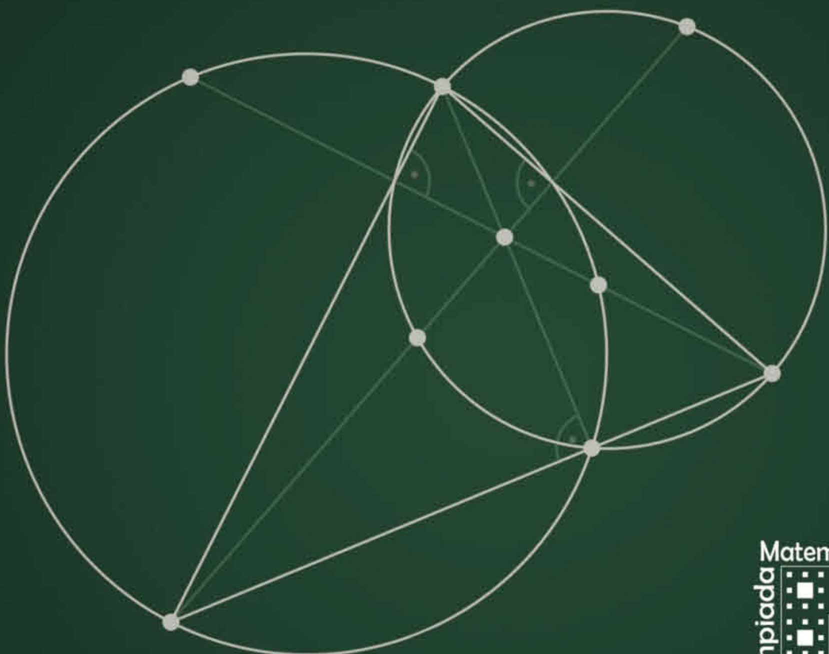
STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

MATEMATYCZNE SEMINARIUM OLIMPIJSKIE

1



Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Seminarium olimpijskie z matematyki

część pierwsza

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

WARSZAWA 2014

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Praca zbiorowa pod redakcją Joachima Jelisiejewa

Recenzent: dr Joanna Jaszuńska

Skład komputerowy i rysunki: Joachim Jelisiejew

Projekt okładki: Adam Klemens

Seminarium olimpijskie z matematyki zorganizowano po raz pierwszy w roku szkolnym 2011/2012 pod nazwą *Poznajemy Olimpiadę Matematyczną Gimnazjalistów*. Działalność ta towarzyszyła organizacji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów w latach 2011–2014 i odbywała się w ramach projektu *Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym*, współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. Zajęcia były skierowane bezpośrednio do nauczycieli matematyki szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych i odbywały się regularnie w całej Polsce. Uczestnicy seminarium poznawali wyjątkowy charakter zadań olimpijskich oraz metodykę ich rozwiązywania, a także otrzymywali materiały dydaktyczne nawiązujące do tematyki zajęć.

Niniejsza broszura jest pierwszą z dwóch części opracowania, które powstało na bazie tych materiałów i zawiera mniej zaawansowaną tematykę. Część druga, publikowana w oddzielnym zeszycie, zawiera tematykę bardziej zaawansowaną.

ISBN 978-83-63288-10-5

Nakład: 5000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

Zasada szufladkowa Dirichleta

Paulina Domagalska, Joanna Jaszuńska i Joachim Jelisiejew

Zasada szufladkowa Dirichleta jest bardzo intuicyjnym, a zarazem niesamowicie skutecznym narzędziem, pozwalającym rozwiązywać wiele różnorodnych problemów matematycznych. Idea jest niezwykle prosta:

Jeśli umieszczamy więcej niż n królików w n klatkach, to w co najmniej jednej klatce musi się znaleźć więcej niż jeden królik.

Dowód jest natychmiastowy: gdyby w każdej klatce miał być co najwyżej jeden królik, zmieścilibyśmy w nich łącznie co najwyżej n królików, tymczasem mamy umieścić ich więcej.

Ważne i przydatne jest również uogólnienie tej zasady:

Jeśli umieszczamy więcej niż $k \cdot n$ królików w n klatkach, to w co najmniej jednej klatce musi się znaleźć więcej niż k królików.

Dowód jest analogiczny — wystarczy rozważyć, ile królików łącznie zmieścilibyśmy w klatkach, gdyby w każdej miało ich być nie więcej niż k.

Zadanie 1. (a) Wykazać, że w dowolnej grupie 8 osób co najmniej dwie urodziły się w tym samym dniu tygodnia.
(b) Wykazać, że wśród 27 uczniów danej klasy co najmniej trzech urodziło się w tym samym miesiącu.

Rozwiązanie

(a) „Królikami” są tutaj osoby, zaś „klatką”, w której umieszczamy danego „królika”, jest dzień tygodnia, w którym ten „królik” się urodził. Skoro jest 7 dni tygodnia i więcej niż 7 osób, to do którejś z „klatek” trafią co najmniej dwa „króliki”, innymi słowy co najmniej dwie osoby urodziły się w tym samym dniu tygodnia.

(b) „Królikami” tym razem są uczniowie, zaś „klatką”, w której umieszczamy danego „królika”, jest miesiąc w którym „królik” (uczeń) się urodził. Skoro jest 12 miesięcy i więcej niż $2 \cdot 12$ uczniów, to do którejś z „klatek” trafią więcej niż dwa „króliki”, innymi słowy co najmniej trzech uczniów urodziło się w tym samym miesiącu.

Zadanie 2. (a) Uzasadnić, że wśród dowolnych pięciu liczb całkowitych niepodzielnych przez pięć można wybrać dwie, których różnica dzieli się przez pięć.
(b) Uzasadnić, że spośród dowolnych n liczb całkowitych niepodzielnych przez n można wybrać dwie, których różnica dzieli się przez n.

Rozwiązanie

(a) Dla każdej z danych liczb rozważmy jej resztę z dzielenia przez pięć. Skoro liczby są niepodzielne przez pięć, to reszta ta należy do zbioru $\{1,2,3,4\}$. Liczb jest pięć, zaś reszt jedynie cztery, więc pewne dwie z danych liczb dają tę samą resztę. Ich różnica jest wtedy podzielna przez pięć.

(b) Rozumowanie z przypadku (a), czyli dla $n=5$, przenosi się bezpośrednio na przypadek ogólny. Liczbie przyporządkowujemy jej (niezerową) resztę z dzielenia przez n. Reszta ta należy do $(n-1)$-elementowego zbioru $\{1,2,\ldots,n-1\}$, zaś liczb z zadania jest n, więc pewne dwie z danych liczb dają tę samą resztę. Ich różnica jest wtedy podzielna przez n.

Zadanie 3. Udowodnić, że wśród dowolnych 17 podzbiorów zbioru pięcioelementowego zawsze znajdą się dwa podzbiory rozłączne.

Rozwiązanie

Zbiór pięcioelementowy ma $2^5=32$ podzbiory. Każdy podzbiór A możemy dobrać w parę z jego dopełnieniem, czyli podzbiorem $\bar{A}$ zawierającym te i tylko te elementy, które do A nie należą. Takich par jest $32/2=16$. Tymczasem zbiorów rozważanych w zadaniu jest 17, więc są wśród nich pewne dwa należące do tej samej pary, czyli rozłączne.

Zadanie 4. Na płaszczyźnie danych jest sześć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każda para punktów została połączona czerwonym lub niebieskim odcinkiem. Udowodnić, że wśród powstałych trójkątów istnieje trójkąt o wszystkich bokach tego samego koloru.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolny punkt A. Co najmniej trzy odcinki łączące go z pozostałymi punktami są tego samego koloru, niech będą to odcinki AB, AC, AD i załóżmy bez straty ogólności, że są one niebieskie. Jeżeli odcinek BC też jest niebieski, to ABC jest trójkątem o bokach tego samego koloru. Podobnie jeżeli CD lub DB jest niebieski. Pozostaje przypadek, gdy wszystkie trzy odcinki BC, CD i DB są czerwone, wtedy trójkąt BCD ma wszystkie boki czerwone.

Zadanie 5. W kwadracie o boku długości 2 leży pięć punktów. Wykazać, że wśród tych punktów znajdują się dwa odległe o nie więcej niż $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Podzielmy kwadrat na cztery mniejsze kwadraty o boku długości jeden. Mamy danych pięć punktów, więc dwa z nich leżą w jednym z kwadratów; oznaczmy je A i B. Najdłuższym odcinkiem zawartym w kwadracie o boku 1 jest przekątna, więc punkty A i B są odległe o co najwyżej jej długość, czyli $\sqrt{2}$.

Zadanie 6. Liczby $a_1,\ldots,a_5$ są całkowite, liczby $b_1,\ldots,b_5$ to te same liczby ustawione w innej kolejności. Udowodnić, że liczba

$$(a_1-b_1)\cdot\ldots\cdot(a_5-b_5)$$

jest parzysta.

Rozwiązanie

Wśród liczb $a_1,\ldots,a_5$ są co najmniej trzy parzyste lub co najmniej trzy nieparzyste. Załóżmy bez straty ogólności, że co najmniej trzy liczby są nieparzyste. Wśród liczb $a_1,\ldots,a_5$, $b_1,\ldots,b_5$ jest wtedy co najmniej sześć liczb nieparzystych, więc w pewnej parze (a_i,b_i) obie liczby są nieparzyste. Ich różnica jest wówczas parzysta, a więc także rozważany w zadaniu iloczyn jest parzysty.

Zadanie 7. (a) Wybrano 51 różnych liczb naturalnych mniejszych od 100. Udowodnić, że istnieją wśród nich takie dwie liczby, że pierwsza dzieli drugą.
(b) Czy to stwierdzenie byłoby prawdą, gdyby wybrano 50 liczb zamiast 51?

Rozwiązanie

(a) Przyporządkujmy każdej wybranej liczbie jej największy dzielnik nieparzysty. Możliwych wartości tego dzielnika jest tyle, ile nieparzystych liczb w zbiorze $\{1,2,\ldots,100\}$, a więc 50. Tymczasem wybraliśmy 51 liczb. Wobec tego pewne dwie z nich, nazwijmy je a i b, mają ten sam największy dzielnik nieparzysty c. Możemy więc zapisać

$$a=2^k\cdot c,\quad b=2^l\cdot c,$$

gdzie k i l są pewnym liczbami całkowitymi nieujemnymi. Jeżeli $k<l$, to a dzieli b, jeżeli zaś $l<k$, to b dzieli a.

(b) Zauważmy, że wśród pięćdziesięciu liczb 51, 52,..., 100 żadna nie jest podzielna przez inną. Istotnie, gdyby pewna liczba a dzieliła inną liczbę b, to mielibyśmy

$$100<2\cdot 51\leqslant 2a\leqslant b\leqslant 100,$$

czyli sprzeczność. Wobec tego odpowiedź na pytanie w części (b) jest negatywna.

Zadanie 8. Każdy punkt okręgu pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wykazać, że istnieje trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg o wszystkich trzech wierzchołkach jednego koloru.

Rozwiązanie

Rozważmy wierzchołki dowolnego pięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg. Pewne trzy z tych wierzchołków mają ten sam kolor, nazwijmy je A, B, C. Dowolne trzy wierzchołki pięciokąta foremnego tworzą trójkąt równoramienny, więc ABC jest szukanym trójkątem.

Zadanie 9. (KM SEM, seria 7, zadanie 6)
Danych jest 70 różnych liczb całkowitych dodatnich, wśród których nie ma liczb większych od 200. Wykazać, że pewne dwie z nich różnią się o 4, o 5 lub o 9.

Rozwiązanie

Oznaczmy dane liczby przez $a_1, \ldots, a_{70}$ i rozważmy liczby

$$a_1, \ldots, a_{70}, \quad a_1+4, \ldots, a_{70}+4, \quad a_1+9, \ldots, a_{70}+9.$$

Łącznie powyżej wypisanych jest 210 liczb całkowitych z przedziału $[1, 209]$, wobec tego pewne dwie z nich są równe. Skoro liczby $a_1, \ldots, a_{70}$ są parami różne, to dla pewnych i, j zachodzi

$$a_i = a_j + 4 \quad \text{lub} \quad a_i = a_j + 9 \quad \text{lub} \quad a_i + 4 = a_j + 9.$$

W pierwszym przypadku liczby a_i, a_j różnią się o 4, w drugim — o 9, zaś w trzecim — o 5.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 10.

Na odcinku o długości jednego metra leży dziewięć różnych punktów. Uzasadnić, że pewne dwa z nich są odległe o nie więcej niż $12,5$ cm.

Zadanie 11.

W kuli o promieniu 1 leży dziewięć punktów. Uzasadnić, że wśród nich można znaleźć dwa odległe o nie więcej niż $\sqrt{3}$.

Zadanie 12. (II OMG, I etap, zadanie 7)

Spośród wszystkich wierzchołków 17-kąta foremnego wybrano dziesięć. Wykazać, że wśród wybranych punktów są cztery będące wierzchołkami trapezu.

Zadanie 13.

(a) Wykazać, że spośród dowolnych 37 liczb całkowitych niepodzielnych przez siedem można wybrać siedem liczb, których suma jest podzielna przez siedem.

(b) Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Wykazać, że spośród dowolnych $(n-1)^2+1$ liczb całkowitych niepodzielnych przez n można wybrać n liczb, których suma jest podzielna przez n.

Zadanie 14.

Na płaszczyźnie danych jest 17 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każda para punktów została połączona czerwonym, niebieskim lub zielonym odcinkiem. Udowodnić, że wśród powstałych trójkątów istnieje trójkąt o wszystkich bokach tego samego koloru.

Zadanie 15.

W kwadracie o boku długości dwa leży dziewięć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że istnieje trójkąt o wierzchołkach w danych punktach, którego pole jest nie większe od $1/2$. Czy to ograniczenie można poprawić?

Zadanie 16.

Wykazać, że z dowolnego zbioru 100 dodatnich liczb całkowitych można tak wybrać pewien niepusty podzbiór, by suma liczb z tego podzbioru była podzielna przez 100.

Zadanie 17.

Udowodnić, że wśród dowolnych sześciu liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 10 można wybrać takie trzy różne liczby, że suma dwóch z nich jest równa trzeciej.

Zadanie 18.

W prostokącie o bokach długości 3 i 4 obrano sześć różnych punktów. Udowodnić, że pewne dwa z nich są odległe o nie więcej niż $\sqrt{5}$.

Zadanie 19. (II OMG, II etap, zadanie 3)

W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykazać, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

Zadanie 20.

Średnica zbioru to maksymalna odległość pomiędzy dwoma jego punktami. Trójkąt równoboczny o boku 1 podzielono na trzy zbiory. Udowodnić, że średnica któregoś z nich jest nie mniejsza niż $1/\sqrt{3}$.

Metoda niezmienników

Urszula Pastwa i Joachim Jelisiejew

Wiele problemów olimpijskich ma następującą postać:

Znajdujemy się w sytuacji A. Czy wykonując określone ruchy możemy dojść do sytuacji B?

Jeżeli możemy dojść do B, wystarczy wskazać odpowiedni ciąg ruchów. Gorzej, gdy wydaje się, że nie możemy osiągnąć B. Wtedy przydatne jest pojęcie *niezmiennika*. Niezmiennik to pewna cecha (np. liczba, kolor, czy reszta z dzielenia) przypisywana każdej sytuacji, która nie zmienia się przy wykonaniu ruchu. Jeżeli wartości niezmiennika w sytuacjach A i B są różne, to z A nie da się dojść do B. Aby lepiej zrozumieć tę ideę, najprościej popatrzeć na poniższe przykłady.

Zadanie 1. Mamy 2013 zapałek. W każdym ruchu możemy zabrać lub dołożyć dokładnie dwie zapałki. Czy wykonując pewną liczbę takich ruchów, możemy zabrać wszystkie zapałki?

Rozwiązanie

To zadanie jest bardzo proste, ale dzięki temu dobrze ilustruje ogólną metodę. Niezmiennikiem jest reszta z dzielenia przez 2 liczby zapałek. Nie zmienia się ona przy wykonaniu ruchu i wynosi 1 dla 2013 zapałek i 0 dla zerowej liczby zapałek. Wobec tego nie da się z sytuacji, gdy mamy 2013 zapałek, dojść do sytuacji, gdy zabrane są wszystkie zapałki (czyli gdy mamy ich 0).

Zadanie 2. Mamy daną liczbę $2012! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2012$. Obliczamy sumę cyfr tej liczby, następnie sumę cyfr tak otrzymanej liczby i tak dalej. Postępujemy tak, aż uzyskamy liczbę jednocyfrową. Jaka to liczba?

Rozwiązanie

Każda dodatnia liczba całkowita daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, jak jej suma cyfr. Wobec tego liczba otrzymana na końcu musi być podzielna przez 9 — bo 2012! jest podzielna — oraz jednocyfrowa i dodatnia. Jest więc ona równa 9.

Zadanie 3. Smok ma 2012 głów. Walczący z nim rycerz umie zadawać cztery rodzaje cięć mieczem. Przy pierwszym rodzaju rycerz ścina dokładnie 18 głów, ale 45 nowych natychmiast odrasta. Przy drugim rodzaju rycerz ścina dokładnie 21 głów i nic nie odrasta. Przy trzecim rodzaju ścinanych jest dokładnie 13 głów, ale 4 z nich odrastają. Czwarty typ jest wyjątkowo pechowy — pozwala ściąć dokładnie jedną smoczą głowę, na miejscu której odrastają aż 124 nowe. Czy rycerz, umiejętnie walcząc, ma szanse ściąć wszystkie głowy smoka tak, aby już żadna nie odrosła?

Rozwiązanie

Przy ciosie pierwszego rodzaju liczba głów smoka rośnie o $45-18=27$. Przy ciosie drugiego rodzaju liczba ta zmniejsza się o 21, przy ciosie trzeciego rodzaju zmniejsza się o 9, zaś przy ciosie czwartego rodzaju zwiększa się o 123.

Niech R oznacza resztę z dzielenia przez 3 liczby głów. Przy dowolnym ciosie R nie zmienia się! Skoro na początku smok miał niepodzielną przez 3 liczbę głów, to nie da się ściąć wszystkich jego głów tak, by żadna nie odrosła.

Zadanie 4. Mamy 17 skarpetek żółtych, 15 skarpetek czerwonych i 13 niebieskich. Ruch polega na zamienieniu dwóch skarpetek różnych kolorów na parę skarpetek w trzecim kolorze. Czy możemy, wykonując pewną liczbę ruchów, uzyskać wszystkie skarpetki w jednym kolorze?

Rozwiązanie

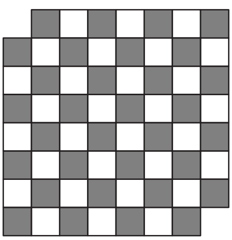
Nie da się uzyskać wszystkich skarpetek w jednym kolorze. Rozważmy różnicę D liczby skarpetek żółtych i czerwonych. Jeżeli zamienimy skarpetki żółtą i czerwoną na parę skarpetek niebieskich, to liczba D nie zmienia się. Jeżeli zamieniamy skarpetki czerwoną i niebieską na parę skarpetek żółtych, to liczba D zwiększa się o 3. Podobnie, gdy wymieniamy skarpetki niebieską i żółtą na parę skarpetek czerwonych, to liczba D zmniejsza się o 3. Ostatecznie, reszta z dzielenia przez 3 liczby D nie zmienia się przy wymianach.

Na początku liczba D wynosi 2. Gdyby udało się uzyskać wszystkie skarpetki w jednym kolorze, to liczba D byłaby równa 0, -45 lub 45. Jest to niemożliwe, ponieważ te liczby dają inne reszty z dzielenia przez 3 niż liczba 2.

Zadanie 5. Mamy szachownicę 8×8 z wyciętymi dwoma przeciwległymi rogami. Czy da się ją pokryć płytkami o wymiarach 1×2?

Rozwiązanie

Popatrzmy na standardowe kolorowanie szachownicy (rysunek 1).



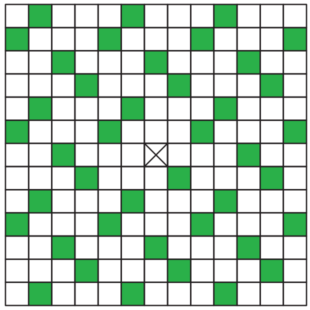
Rysunek 1

Każda płytka 1×2 zakrywa jedno pole czarne i jedno białe. Gdyby szachownicę można było pokryć płytkami, zawierałaby ona tyle samo pól białych i czarnych, tymczasem ma ona o dwa pola białe mniej.

Zadanie 6. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 klockami 1×4 w taki sposób, że tylko środkowe pole nie jest zakryte?

Rozwiązanie

Wykażemy, że nie da się tego zrobić. Pokolorujmy szachownicę jak na rysunku 2.



Rysunek 2

Zauważmy, że każdy klocek 1×4 ułożony poziomo lub pionowo zakrywa dokładnie jedno pokolorowane pole. Gdyby szachownicę bez środkowego pola można było pokryć klockami, to pól pokolorowanych byłoby $(13^2-1)/4=42$. Tymczasem jest ich tylko 41, co kończy dowód.

Zadanie 7. Na każdym polu szachownicy 8×8 stoi pionek. Możemy wykonać następującą operację: wybieramy trzy sąsiednie pola znajdujące się w jednym rzędzie (bądź kolumnie). Jeśli na każdym ze skrajnych pól stoi (co najmniej jeden) pionek, to możemy wziąć po jednym pionku ze skrajnych pól i przestawić je na pole środkowe. Czy możemy doprowadzić do sytuacji, w której wszystkie pionki znajdują się na jednym polu szachownicy?

Rozwiązanie

Oznaczmy rzędy numerami od 1 do 8. Dla każdego układu pionków, przyporządkujmy każdemu z pionków numer rzędu pola, na którym on stoi i rozważmy sumę S tych liczb. Wynosi ona na początku $8\cdot(1+2+\ldots+8)=8\cdot 36$. Kluczowe jest zauważenie, że S nie zmienia się przy operacji przestawienia. Trzeba sprawdzić dwa przypadki:

1. Przestawiane pionki stoją w jednym rzędzie. Ten przypadek jest oczywisty.
2. Przestawiane pionki stoją w jednej kolumnie. Znaczy to, że zdejmujemy pionki z rzędów $n-1$ i $n+1$, a ustawiamy je w rzędzie n. Skoro tak, to suma po zmianie wynosi $S-(n-1)-(n+1)+2n=S$.

Gdy 64 pionki ustawione są na jednym polu, to liczba S dzieli się przez 64. Tymczasem początkowo suma ta jest równa $8\cdot 36$, więc nie dzieli się przez 64. To pokazuje, że z wyjściowej sytuacji nie da się operacjami przestawienia dojść do sytuacji, w której wszystkie pionki stoją na jednym polu.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 8.

Mamy 15 kart, każda jest z jednej strony biała, a z drugiej strony czarna. Rozkładamy je białą stroną do góry. Ruch polega na jednoczesnym odwróceniu dowolnych dwóch kart. Czy można, wykonując pewną liczbę ruchów, doprowadzić do tego, by wszystkie karty leżały czarną stroną do góry?

Zadanie 9.

Mamy 1 dukata (i 0 talarów). W pierwszym kantorze możemy wymienić 1 dukata na 10 talarów, natomiast w drugim kantorze — 1 talara na 10 dukatów. Czy możemy tak wymieniać pieniądze, aby na końcu mieć tyle samo dukatów, co talarów?

Zadanie 10.

Na tablicy napisano liczby od 1 do 2012. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Postępujemy tak do momentu, gdy zostanie nam jedna liczba. Czy może nią być liczba 33?

Zadanie 11.

Rysujemy dziesięciokąt foremny i w każdym wierzchołku kładziemy żeton. Ruch polega na wybraniu dowolnych dwóch żetonów i przełożeniu każdego z nich do dowolnego wierzchołka sąsiadującego z tym, w którym leżał. Czy można doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żetony leżą w jednym wierzchołku?

Zadanie 12.

Na szachownicy 2011×2013 są rozmieszczone pionki, po jednym na każdym polu. Czy można je tak poprzestawiać, aby każdy pionek stał na polu sąsiadującym bokiem z polem, które zajmował i żeby wciąż na każdym polu stał dokładnie jeden pionek?

Zadanie 13.

Dana jest szachownica 4×4 wypełniona znakami „+” i „−” w taki sposób, że dokładnie jedno pole zawiera znak „−”. Dozwolone są zmiany wszystkich znaków na przeciwne na dowolnej linii pionowej lub poziomej oraz na głównej przekątnej. Czy wykonując takie operacje można otrzymać szachownicę z samymi plusami?

Zadanie 14.

Dana jest szachownica 4×4 wypełniona znakami „+” i „−” w taki sposób, że dokładnie jedno pole zawiera znak „−” i jest to pole na brzegu, ale nie w rogu. Dozwolone są zmiany wszystkich znaków na przeciwne na dowolnej linii pionowej lub poziomej oraz na dowolnej linii skośnej równoległej do jednej z głównych przekątnych szachownicy i przechodzącej przez środki pól. Czy wykonując takie operacje można otrzymać szachownicę z samymi plusami?

Turnieje i grafy

Joanna Ochremiak, Urszula Pastwa i Joachim Jelisiejew

Wędrówka pierwsza — po wygraną

W poniższych zadaniach za *turniej* uznajemy zestaw rozgrywek pomiędzy n zawodnikami. Przyjmujemy, że każda para zawodników rozegrała między sobą dokładnie jeden mecz i nie było remisów.

Zadanie 1. Udowodnić, że w każdym turnieju zawodników można ustawić w ciąg tak, że każdy zawodnik wygrał z zawodnikiem stojącym bezpośrednio za nim.

Rozwiązanie

Konstruujemy ciąg zawodników indukcyjnie, przy czym dbamy, by na każdym etapie konstrukcji spełniony był warunek z zadania. Na początek ustawiamy dowolnego zawodnika w ciąg jednoelementowy. Załóżmy, że ustawiliśmy już k zawodników w ciąg $y_1, \ldots, y_k$. Weźmy dowolnego zawodnika x nieustawionego w ciąg. Jeżeli x wygrał z y_1, to wstawiamy go na początek ciągu. Jeżeli x przegrał z y_k, to wstawiamy go na koniec. Jeżeli x przegrał z y_1 i wygrał z y_k, to istnieje takie l, że x przegrał z y_l i wygrał z y_{l+1}. Wtedy wstawiamy x pomiędzy y_l i y_{l+1}. Warunek „każdy zawodnik wygrał z zawodnikiem stojącym bezpośrednio za nim" jest spełniony w nowym ciągu. Kontynuujemy, wstawiając kolejnego zawodnika. Ostatecznie otrzymujemy ciąg spełniający warunki zadania.

Zadanie 2. *Trójką remisową* nazwiemy takich trzech zawodników x, y, z, że x wygrał z y, y wygrał z z, zaś z wygrał z x. Dowieść, że jeżeli w turnieju nie ma trójek remisowych, to wszystkich zawodników można ustawić w taki ciąg $a_1, \ldots, a_n$, że każdy zawodnik przegrał ze wszystkimi stojącymi po nim w ciągu, innymi słowy, jeżeli $i < j$, to a_i przegrał z a_j.

Rozwiązanie

Zaczniemy od wykazania, że istnieje kandydat na a_1, tzn. zawodnik, który przegrał ze wszystkimi innymi. Niech x będzie zawodnikiem, który przegrał najwięcej meczów. Niech $\mathcal{Z}$ oznacza zbiór zawodników, z którymi przegrał x. Załóżmy, że istnieje zawodnik y, z którym x wygrał. Gdyby y przegrał ze wszystkimi zawodnikami z $\mathcal{Z}$, to miałby więcej przegranych niż x; sprzeczność. Wobec tego istnieje zawodnik z w $\mathcal{Z}$, z którym y wygrał. Skoro $z \in \mathcal{Z}$ to znaczy, że z wygrał z x. Wobec tego x, y, z jest trójką remisową, co przeczy założeniu zadania. Sprzeczność ta pokazuje, że nie istnieje y, z którym x wygrał, czyli że x przegrał ze wszystkimi. Przyjmujemy $a_1 := x$. Usuwamy a_1 ze zbioru zawodników i powtarzamy powyższe rozumowanie, otrzymując a_2 itd.

Wędrówka druga — palcem po mapie

Formalnie mówiąc, *graf* składa się z *w wierzchołków* i *k krawędzi*. Każda krawędź łączy dwa (niekoniecznie różne) wierzchołki grafu. Graf jest *prosty*, jeżeli każdą parę wierzchołków łączy co najwyżej jedna krawędź i każda krawędź łączy różne wierzchołki (nie ma „pętli"). Graf jest *planarny*, jeżeli można go narysować na płaszczyźnie tak, że wierzchołki są punktami płaszczyzny, krawędzie są krzywymi łączącymi te punkty oraz krawędzie nie przecinają się, a jedynie stykają w wierzchołkach. *Ścianami* grafu planarnego nazywamy obszary, na które krawędzie dzielą płaszczyznę (w tym jeden obszar nieograniczony). Liczbę ścian oznaczamy przez s. Zgodnie z tytułem, o grafie planarnym warto myśleć jako o mapie miejscowości połączonych szlakami czy drogami.

Zadanie 3. Graf *dwudzielny* to taki graf, którego wierzchołki można podzielić na dwa zbiory tak, by każda krawędź łączyła wierzchołki z różnych zbiorów. Pokazać, że w dowolnym prostym grafie planarnym zachodzi nierówność $2k \geqslant 3(s-1)$, zaś w każdym prostym grafie planarnym dwudzielnym zachodzi $2k \geqslant 4(s-1)$.

Rozwiązanie

W tym zadaniu dla wygody ze zbioru ścian wyrzucamy ścianę nieograniczoną i rozważamy tylko $s-1$ pozostałych ścian.

Niech X oznacza liczbę par *(ściana, krawędź tej ściany)*. Skoro graf jest prosty, to każda ściana ma co najmniej trzy krawędzie, a jeżeli graf jest dwudzielny, to co najmniej cztery. Tak więc $X \geqslant 3(s-1)$, a w grafie dwudzielnym $X \geqslant 4(s-1)$.

Z drugiej strony, każda krawędź należy do co najwyżej dwóch ścian, więc zachodzi $2k \geqslant X$. Łącznie otrzymujemy nierówność $2k \geqslant X \geqslant 3(s-1)$, a w grafie dwudzielnym $2k \geqslant X \geqslant 4(s-1)$.

Graf jest *spójny*, jeżeli każde dwa wierzchołki są połączone ciągiem krawędzi. Każdy graf jest złożony ze spójnych części, zwanych *spójnymi składowymi* grafu. W poniższym zadaniu stosujemy *wzór Eulera* dla spójnych grafów planarnych: $w-k+s=2$, patrz zadanie 8.

Zadanie 4. Pokazać, że jeśli graf jest prosty i planarny, to zawiera wierzchołek, z którego wychodzi mniej niż 6 krawędzi.

Rozwiązanie

Wystarczy rozważyć przypadek, gdy graf jest spójny — jeżeli graf nie jest spójny, to składa się z kilku spójnych składowych, wtedy rozważamy dowolną z nich. Gdyby z każdego wierzchołka wychodziło co najmniej 6 krawędzi, wówczas zachodziłaby nierówność $2k \geqslant 6w$ (ponieważ każda krawędź ma dwa końce), czyli $w \leqslant \frac{1}{3}k$. Na mocy zadania 3 mamy też $2k \geqslant 3(s-1)$, czyli $s \leqslant \frac{2}{3}k+1$. Wówczas $w+s \leqslant k+1$, co jest sprzeczne z wzorem Eulera $w+s=k+2$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wędrówka pierwsza — po wygraną

W zadaniach 5–7 *mistrzem* nazywamy taką osobę, która wygrała z każdym innym zawodnikiem bezpośrednio lub *pośrednio* (czyli wygrała z zawodnikiem, który z nim wygrał).

Zadanie 5.
Czy w każdym turnieju istnieje mistrz?

Zadanie 6.
Pokazać, że jeśli w turnieju bierze udział dokładnie czterech zawodników, to któryś z nich nie jest mistrzem.

Zadanie 7.
Pokazać, że jeśli w turnieju bierze udział co najmniej 5 zawodników, to może zdarzyć się tak, że każdy jest mistrzem.

Wędrówka druga — palcem po mapie

Zadanie 8.
Wzór Eulera. Pokazać, że w grafie spójnym i planarnym zachodzi równość $w-k+s=2$.

Zadanie 9.
Pokazać, że wierzchołki prostego grafu planarnego można pokolorować na 6 kolorów tak, by żadne dwa połączone krawędzią wierzchołki nie były tego samego koloru.

Liczby pierwsze i złożone

Hanna Saeki i Joachim Jelisiejew

Liczba naturalna p jest *liczbą pierwszą*, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: 1 i p. Liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy *liczbą złożoną*.

Zadanie 1. Ile jest liczb pierwszych?

Rozwiązanie

Odpowiedzi na to pytanie udzielił w III wieku p.n.e. Euklides. Przedstawimy teraz rozumowanie zbliżone do tego, które zamieścił w swoim dziele *Elementy*.

Załóżmy, że liczb pierwszych jest skończenie wiele i oznaczmy je przez $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Rozważmy liczbę

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Jeżeli q jest liczbą pierwszą, to nasza lista liczb pierwszych nie była wyczerpująca — liczba q jest bowiem większa od każdej z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

W przypadku, gdy q jest liczbą złożoną, ma ona dzielnik pierwszy p będący jedną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (bo założyliśmy, że innych liczb pierwszych nie ma). Zatem również iloczyn $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ jest podzielny przez p. Jeśli p dzieli dwie liczby, to dzieli też ich różnicę, więc $q - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = 1$ jest liczbą podzielną przez p. Ale nie istnieje liczba pierwsza dzieląca liczbę 1. Sprzeczność!

Uzyskaliśmy sprzeczność z faktem, że jedyne liczby pierwsze to $p_1, \ldots, p_n$. Wobec tego liczb pierwszych nie da się ustawić w ciąg $p_1, \ldots, p_n$, innymi słowy jest ich nieskończenie wiele.

Pytań dotyczących liczb pierwszych jest dużo więcej, na wiele z nich nie znamy jeszcze odpowiedzi. Przykładem jest pytanie o prawdziwość hipotezy Goldbacha: *każdą liczbę parzystą większą od* 2 *można zapisać jako sumę dwóch liczb pierwszych*. Równie słynny problem otwarty to pytanie o prawdziwość hipotezy liczb pierwszych bliźniaczych: *istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, dla których liczba $p+2$ również jest pierwsza* (dwie liczby pierwsze, których różnica wynosi 2, nazywamy *liczbami bliźniaczymi*).

Poniżej przedstawiamy przykładowe zadania konkursowe dotyczące liczb pierwszych.

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których $p+4$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Szukamy liczb pierwszych p spełniających równanie $p+4=n^2$ dla pewnej liczby naturalnej n.

Po przekształceniu tego równania i skorzystaniu ze wzoru skróconego mnożenia, uzyskujemy rozkład liczby p na czynniki:

$$p = n^2 - 4 = (n-2)(n+2).$$

Przypomnijmy, że p jako liczba pierwsza ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: 1 i p. Czynnik $n+2$ jest liczbą naturalną większą od 1, dlatego $n+2=p$. Drugi czynnik jest więc równy 1. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} n+2 = p \\ n-2 = 1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para liczb $n=3$ i $p=5$. Zatem jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $p=5$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, q, r, dla których

$$pq + 1 = p + q + r.$$

Rozwiązanie

Po przekształceniu równania otrzymujemy rozkład liczby r na czynniki:

$$r = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1).$$

Ponieważ oba czynniki są dodatnie, a r jest liczbą pierwszą, to liczby pierwsze p, q, r znajdujemy, rozwiązując układy równań

$$\begin{cases} p-1 = r \\ q-1 = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} p-1 = 1 \\ q-1 = r. \end{cases}$$

Rozważmy pierwszy z tych układów. Równanie $p-1=r$ jest spełnione tylko przez liczby różnej parzystości, czyli $p=3$ i $r=2$, a z drugiego równania wyliczamy $q=2$. Drugi układ równań rozwiązujemy analogicznie. Ostatecznie warunki zadania spełniają trójki $p=3$, $q=2$, $r=2$ oraz $p=2$, $q=3$, $r=2$.

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p i q, dla których $p^2 - 2q^2 = 1$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że liczba p jest nieparzysta, gdyż w przeciwnym wypadku strony równania miałyby różną parzystość. Po przekształceniu równania otrzymujemy rozkład liczby $2q^2$ na czynniki:

$$2q^2 = p^2 - 1 = (p-1)(p+1).$$

Ponieważ liczby $(p-1)$ i $(p+1)$ są kolejnymi liczbami parzystymi, to jedna z nich jest podzielna przez 4, a druga przez 2, dlatego ich iloczyn jest podzielny przez 8. Wynika stąd, że liczba $2q^2$ jest podzielna przez 8, więc q jest liczbą parzystą i jednocześnie liczbą pierwszą, czyli $q=2$. Po podstawieniu tej wartości do danego równania otrzymujemy $p^2=9$, czyli $p=3$. Zatem jedyną parą liczb spełniającą warunki zadania jest para $p=3$ i $q=2$.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli $p>3$ i liczby p oraz $10p+1$ są pierwsze, to liczba $5p+1$ nie jest pierwsza.

Rozwiązanie

Ponieważ $p>3$, to $p=3k+1$ lub $p=3k+2$ dla pewnej liczby naturalnej k. Rozważmy pierwszy przypadek i podstawmy $p=3k+1$ do wyrażenia $5p+1$:

$$5p+1=5(3k+1)+1=15k+6=3(5k+2).$$

Skoro $5k+2>1$, to $5p+1$ ma więcej niż 2 dzielniki i nie jest liczbą pierwszą.

W drugim przypadku $p=3k+2$ i po podstawieniu:

$$10p+1=10(3k+2)+1=30k+21=3(10k+7),$$

a skoro $10k+7>1$, to $10p+1$ nie jest liczbą pierwszą, więc nie jest spełnione założenie zadania.

Zadanie 6. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$p^3+p^2+p-3$$

również jest pierwsza.

Rozwiązanie

Rozważmy najpierw przypadek, w którym p jest liczbą parzystą, czyli $p=2$. Wówczas

$$p^3+p^2+p-3=8+4+2-3=11,$$

więc $p=2$ spełnia warunki zadania.

W sytuacji, gdy p jest liczbą nieparzystą, liczba p^3+p^2+p-3 jest parzysta, czyli

$$p^3+p^2+p-3=2.$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$p(p^2+p+1)=5.$$

Ponieważ 5 jest liczbą pierwszą oraz liczby p i p^2+p+1 są większe od 1, to powyższe równanie nie ma rozwiązań. Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest zatem liczba $p=2$.

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli liczba pierwsza p jest większa od 3, to liczba p^2-1 jest podzielna przez 24.

Rozwiązanie

Rozłóżmy liczbę p^2-1 na czynniki:

$$p^2-1=(p-1)(p+1).$$

Liczby $p-1$ i $p+1$ są kolejnymi liczbami parzystymi, bo p jest liczbą nieparzystą, więc jedna z nich jest podzielna przez 4. Ich iloczyn jest zatem podzielny przez 8. Jedna z liczb $p-1$ i $p+1$ jest też podzielna przez 3, ponieważ wśród trzech kolejnych liczb naturalnych jest jedna podzielna przez 3, a p jest liczbą pierwszą większą od 3. Liczba p^2-1 jest zatem podzielna przez 8 i przez 3, czyli jest podzielna przez 24.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 8.
Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których $p+27$ jest sześcianem liczby naturalnej.

Zadanie 9.
Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, q, r, dla których $pq+3=3p+q+r$.

Zadanie 10.
Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, q, r, dla których $pqr=5(p+q+r)$.

Zadanie 11.
Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczby $4p^2+1$ oraz $6p^2+1$ również są pierwsze.

Zadanie 12.
Udowodnij, że jeśli liczby p i p^2+2 są pierwsze, to liczba p^3+2 też jest pierwsza.

Zadanie 13.
Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba n^4+n^2+1 jest pierwsza.

Zadanie 14.
Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba n^3+n^2+n-3 jest pierwsza.

Zadanie 15.
Udowodnij, że jeśli liczby pierwsze p i q są większe od 3, to liczba p^2-q^2 jest podzielna przez 24.

Kongruencje i ich własności

Adam Osękowski, Urszula Pastwa i Joachim Jelisiejew

Kongruencje stanowią bardzo wygodne narzędzie służące do badania i zapisywania rozmaitych faktów związanych z podzielnością.

Definicja. *Załóżmy, że a, b są liczbami całkowitymi, natomiast m jest liczbą całkowitą dodatnią. Mówimy, że a przystaje do b modulo m, jeśli liczba $a-b$ dzieli się przez m. Stosujemy oznaczenie*

$$a \equiv b \pmod{m}$$

i nazywamy je kongruencją.

Opiszmy podstawowe własności kongruencji. We wszystkich wzorach poniżej a, b, c, d są liczbami całkowitymi, zaś m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi.

1. $a \equiv a \pmod{m}$.
2. Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$, to $b \equiv a \pmod{m}$.
3. Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $b \equiv c \pmod{m}$, to $a \equiv c \pmod{m}$.
4. Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$, to $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$.
5. Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$, to $ac \equiv bc \pmod{m}$.
6. Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $c \equiv d \pmod{m}$, to $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
7. Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $c \equiv d \pmod{m}$, to $ac \equiv bd \pmod{m}$.
8. W szczególności, z własności 7 wynika, iż kongruencje można potęgować stronami:
   Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$, to $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Zatem kongruencje można dodawać stronami, odejmować stronami i mnożyć stronami (oczywiście, jeśli rozpatrujemy przystawanie *modulo ta sama liczba*). Warto tu zwrócić uwagę, iż kongruencji na ogół *nie można dzielić stronami*. Przykładowo, zachodzą kongruencje

$$18 \equiv 3 \pmod{3} \quad \text{oraz} \quad 3 \equiv 3 \pmod{3},$$

ale $6 \not\equiv 1 \pmod{3}$.

Zakończmy powyższe teoretyczne rozważania obserwacją, iż jeśli liczba a daje przy dzieleniu przez m resztę r, to oczywiście $a \equiv r \pmod{m}$.

Przejdźmy do zadań.

Zadanie 1. Udowodnić, że liczba $93^{93} - 33^{33}$ dzieli się przez 10.

Rozwiązanie

Zauważmy, że zachodzą kongruencje $93 \equiv 3 \pmod{10}$, $33 \equiv 3 \pmod{10}$ oraz $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$. Wobec tego

$$93^{93} \equiv 3^{93} = (3^4)^{23} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{10}$$

oraz

$$33^{33} \equiv (3^4)^8 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Wobec tego, mamy $93^{93} \equiv 33^{33} \pmod{10}$, co jest równoważne tezie zadania.

Zadanie 2. (a) Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez 7.

(b) Udowodnić, że dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n, liczba $2^n + 1$ nie dzieli się przez 7.

Rozwiązanie

(a) Mamy $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Zatem, dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej k,

$$\begin{aligned} 2^{3k} &\equiv 1 \pmod 7, \\ 2^{3k+1} &\equiv 2 \pmod 7, \\ 2^{3k+2} &\equiv 4 \pmod 7. \end{aligned}$$

Wobec tego, liczba $2^n - 1$ dzieli się przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy n dzieli się przez 3.

(b) Dodając 1 do obu stron wszystkich powyższych kongruencji, dostajemy

$$\begin{aligned} 2^{3k} + 1 &\equiv 2 \pmod 7, \\ 2^{3k+1} + 1 &\equiv 3 \pmod 7, \\ 2^{3k+2} + 1 &\equiv 5 \pmod 7. \end{aligned}$$

Zatem, niezależnie od tego, jaką resztę przy dzieleniu przez 3 daje liczba n, liczba $2^n + 1$ nie dzieli się przez 7.

Zadanie 3. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n liczba $3^{4^n} + 23$ dzieli się przez 13.

Rozwiązanie

Mamy $3^4 = 81 \equiv 3 \pmod{13}$, skąd wynika, że

$$\begin{aligned} 3^{4^n} + 23 = (3^4)^{4^{n-1}} + 23 \equiv 3^{4^{n-1}} + 23 \equiv \ldots \equiv \\ \equiv 3^4 + 23 \equiv 3^1 + 23 = 26 \equiv 0 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Stąd teza.

Zadanie 4. Wyznaczyć ostatnie dwie cyfry liczby 2012^{2012}.

Rozwiązanie

Wystarczy zbadać, jaką resztę daje podana liczba przy dzieleniu przez 100. Zauważmy, iż $2012 \equiv 12 \pmod{100}$ oraz $144 \equiv 44 \pmod{100}$, skąd

$$2012^{2012} \equiv 12^{2012} = (12^2)^{1006} = 144^{1006} \equiv 44^{1006} \pmod{100}.$$

Dalej,

$$44^2 = 1936 \equiv 36 \pmod{100} \quad \text{oraz} \quad 36^2 = 1296 \equiv -4 \pmod{100},$$

skąd wynika, że

$$44^4 \equiv -4 \pmod{100}.$$

Zatem

$$2012^{2012} \equiv 44^2 \cdot (44^4)^{251} \equiv 36 \cdot (-4)^{251} = -9 \cdot 4^{252} \pmod{100}.$$

Wreszcie, $4^4 = 256 \equiv -44 \pmod{100}$, skąd

$$\begin{aligned} 2012^{2012} &\equiv -9 \cdot (4^4)^{63} \equiv 9 \cdot 44^{63} = 9 \cdot 44 \cdot 44^2 \cdot (44^4)^{15} \equiv \\ &\equiv -9 \cdot 44 \cdot 36 \cdot 4^{15} = -11 \cdot 36^2 \cdot 4^{15} \equiv \\ &\equiv 11 \cdot 4^{16} \equiv 11 \cdot 44^4 \equiv 11 \cdot (-4) \equiv 56 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Zatem cyfra jedności liczby 2012^{2012} to 6; cyfra dziesiątek wynosi 5.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $3^p + 4^p$ jest podzielna przez 181.

Rozwiązanie

Podstawienie kilku przykładowych wartości p prowadzi do odkrycia pierwszego rozwiązania: $3^5 + 4^5 = 243 + 1024 = 1267 = 181 \cdot 7$. To sugeruje, by zbadać liczbę $3^p + 4^p$ przy podstawieniu $p = 5k + \ell$ (dla k będącej liczbą całkowitą nieujemną oraz $\ell \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$). Mamy $3^5 \equiv -4^5 \pmod{181}$, stąd

$$3^{5k} \equiv (-1)^k \cdot 4^{5k} \pmod{181}.$$

Możemy więc napisać

$$\begin{aligned} 3^p + 4^p &= 3^{5k+\ell} + 4^{5k+\ell} = 3^{5k} \cdot 3^\ell + 4^{5k} \cdot 4^\ell \equiv \\ &\equiv (-1)^k \cdot 4^{5k} \cdot 3^\ell + 4^{5k} \cdot 4^\ell = 4^{5k}\left[(-1)^k \cdot 3^\ell + 4^\ell\right] \pmod{181}. \end{aligned}$$

Liczba 181 jest pierwsza, a zatem nie ma dzielników większych od 1 wspólnych z 4^{5k}. Jeśli więc $3^p + 4^p$ dzieli się przez 181, to musi zachodzić kongruencja

$$(-1)^k \cdot 3^\ell + 4^\ell \equiv 0 \pmod{181}.$$

Dla k nieparzystego oraz $\ell = 0$ warunek ten jest oczywiście spełniony, zaś dla pozostałych k, ℓ nie zachodzi. Sprawdzamy bowiem, że $3^0 + 4^0 \not\equiv 0 \pmod{181}$,

$$1 \leqslant (-1)^k \cdot 3^\ell + 4^\ell \leqslant 180 \qquad \text{dla } \ell = 1, 2, 3$$

oraz

$$\pm 3^4 + 4^4 = \pm 81 + 256 \not\equiv 0 \pmod{181}.$$

Wykazaliśmy zatem, że liczba 3^p+4^p dzieli się przez 181 wtedy i tylko wtedy, gdy p jest postaci $5k$ dla pewnej dodatniej liczby nieparzystej k. Ponieważ p ma być liczbą pierwszą, rozwiązanie $p=5$, odgadnięte na wstępie, jest jedynym rozwiązaniem zadania.

Zadanie 6. Wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych dodatnich n, liczba $1+2^{4^n}+2^{5^n}$ jest złożona.

Rozwiązanie

Wykażemy, że jeśli n jest dodatnią liczbą nieparzystą, to badana liczba jest podzielna przez 7; skoro $1+2^{4^n}+2^{5^n}>7$, to wyniknie z tego teza zadania. Dla $n=1$ dostajemy liczbę $1+2^4+2^5=49$, która oczywiście dzieli się przez 7. Załóżmy dalej, że n jest liczbą nieparzystą większą od 1.

Zauważmy, iż $2^4\equiv 2 \pmod 7$, skąd

$$2^{4^n}=(2^4)^{4^{n-1}}\equiv 2^{4^{n-1}} \pmod 7$$

i analogicznie $2^{4^n}\equiv 2^{4^{n-2}} \pmod 7$. Podobnie $2^5\equiv 4=2^2 \pmod 7$, a więc

$$2^{5^n}=(2^5)^{5^{n-1}}\equiv 2^{5^{n-1}\cdot 2}=\left(2^{5^{n-1}}\right)^2 \pmod 7$$

oraz

$$2^{5^{n-1}}\equiv\left(2^{5^{n-2}}\right)^2 \pmod 7.$$

Ostatnie dwie kongruencje prowadzą do wniosku, że

$$2^{5^n}\equiv\left(2^{5^{n-2}}\right)^4=(2^4)^{5^{n-2}}\equiv 2^{5^{n-2}} \pmod 7.$$

Wobec tego wykazaliśmy, iż

$$1+2^{4^n}+2^{5^n}\equiv 1+2^{4^{n-2}}+2^{5^{n-2}} \pmod 7,$$

a zatem

$$1+2^{4^n}+2^{5^n}\equiv 1+2^{4^1}+2^{5^1}=49\equiv 0 \pmod 7.$$

Rozwiązanie jest zakończone.

Zadanie 7. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, e, f takie, że

$$a+b=c+d=e+f=101.$$

Udowodnić, że liczby ace/bdf nie można zapisać w postaci ułamka m/n, gdzie m, n są liczbami całkowitymi dodatnimi o sumie mniejszej niż 101.

Rozwiązanie

Zapiszmy liczbę ace/bdf w postaci ułamka nieskracalnego m/n; istnieje zatem taka liczba całkowita dodatnia k, że

$$ace=k\cdot m \qquad \text{oraz} \qquad bdf=k\cdot n.$$

Dalej, mamy

$$\begin{aligned} a &\equiv -b \pmod{101}, \\ c &\equiv -d \pmod{101}, \\ e &\equiv -f \pmod{101}, \end{aligned}$$

a zatem

$$ace \equiv -bdf \pmod{101},$$

czyli $ace + bdf = k \cdot (m+n)$ dzieli się przez 101. Z drugiej strony, 101 jest liczbą pierwszą i każda z liczb a, b, c, d, e, f należy do zbioru $\{1, 2, \ldots, 100\}$. W konsekwencji, ace oraz bdf nie dzielą się przez 101, a zatem k także nie dzieli się przez 101. Doszliśmy więc do wniosku, iż $101 | m+n$, co pociąga za sobą $m+n \geqslant 101$; stąd teza.

Zadanie 8. Udowodnić *małe twierdzenie Fermata:*

Jeśli p jest liczbą pierwszą, zaś a liczbą całkowitą dodatnią niepodzielną przez p, to a^{p-1} daje resztę 1 z dzielenia przez p.

Rozwiązanie

Po pierwsze wykażemy, że liczby ze zbioru $\{a, 2a, \ldots, (p-1)a\}$ dają różne reszty z dzielenia przez p. Załóżmy bowiem, że liczby ka i la dają tę samą resztę, czyli $p \,|\, ka - la = a(k-l)$. Skoro liczba a jest niepodzielna przez p, to $p \,|\, k - l$. Ale mamy $1 \leqslant k, l \leqslant p-1$, więc

$$-p + 2 = 1 - (p-1) \leqslant k - l \leqslant (p-1) - 1 = p - 2.$$

Jedyną liczbą podzielną przez p w przedziale $[-p+2, p-2]$ jest 0, zatem $k - l = 0$, czyli $k = l$.

Niech r_i oznacza resztę z dzielenia liczby ia przez p, dla $i = 1, 2, \ldots, p-1$. Wykazaliśmy powyżej, że zbiór reszt $\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_{p-1}\}$ ma $p-1$ różnych elementów. Żadna z liczb ia nie dzieli się przez p, zatem $\mathcal{R}$ jest zawarty w zbiorze $\{1, 2, \ldots, p-1\}$. Zbiory te mają tyle samo elementów, więc

$$\{r_1, \ldots, r_{p-1}\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}.$$

Wobec tego

$$(1 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot \ldots \cdot ((p-1) \cdot a) \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \pmod{p},$$

czyli $(p-1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$, więc $p \,|\, (p-1)! \cdot \big(a^{p-1} - 1\big)$. Liczba p jest pierwsza i p nie dzieli $(p-1)!$, więc $p \,|\, a^{p-1} - 1$, innymi słowy a^{p-1} daje resztę 1 z dzielenia przez p, co było do udowodnienia.

Zadanie 9. W pewnej klasie jest mniej niż 40 osób. Gdy uczniowie chcieli podzielić się na grupy 5-osobowe, 4 osoby zostały bez grupy. Gdy natomiast chcieli podzielić się na grupy 6-osobowe, 5 osób zostało bez grupy. Ilu uczniów jest w tej klasie?

Rozwiązanie

Dołączmy do klasy jeszcze jednego ucznia; wtedy będzie można uczniów podzielić na grupy pięcioosobowe, a także na grupy sześcioosobowe, więc liczba uczniów będzie podzielna przez 30. Wobec tego liczba uczniów wyniesie dokładnie 30. Początkowo jest więc 29 uczniów.

Zadanie 10. Udowodnić *chińskie twierdzenie o resztach*:

Dla dodatnich liczb całkowitych względnie pierwszych a_1 i a_2 oraz liczb całkowitych $0 \leqslant r_1 < a_1, 0 \leqslant r_2 < a_2$ istnieje dokładnie jedna liczba $0 \leqslant n < a_1 \cdot a_2$ taka, że n daje resztę r_1 z dzielenia przez a_1 i resztę r_2 z dzielenia przez a_2.

Rozwiązanie

Jeżeli liczby k i l dają te same reszty zarówno z dzielenia przez a_1, jak i przez a_2, to znaczy, że $a_1 \big| k-l$ i $a_2 \big| k-l$, czyli $a_1 \cdot a_2 \big| k-l$, gdyż liczby a_1, a_2 są względnie pierwsze. Zatem liczby k i l różnią się o wielokrotność liczby $a_1 \cdot a_2$.

Wynika stąd, że każde dwie różne z liczb $0, 1, \ldots, a_1 \cdot a_2 - 1$ dają różne reszty z dzielenia przez a_1 lub różne reszty z dzielenia przez a_2. Możliwych par *(reszta z dzielenia przez a_1, reszta z dzielenia przez a_2)* jest $a_1 \cdot a_2$; tyle samo, ile liczb $0, 1, \ldots, a_1 \cdot a_2 - 1$. To oznacza, że w zbiorze tych liczb każda para reszt występuje dokładnie raz. Innymi słowy, dla każdych zadanych r_1 i r_2 znajdziemy dokładnie jedną liczbę n ze zbioru $\{0, 1, \ldots, a_1 \cdot a_2 - 1\}$ taką, że n daje resztę r_1 przy dzieleniu przez a_1 i resztę r_2 przy dzieleniu przez a_2. To kończy dowód.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 11.

Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n, liczba $2^{4^n} + 5$ jest podzielna przez 21.

Zadanie 12.

Udowodnić, że jeśli n jest liczbą całkowitą nieujemną, to liczba $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ dzieli się przez 7.

Zadanie 13.

Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $2^p + 3^p$ jest podzielna przez 11.

Zadanie 14.
Znaleźć resztę z dzielenia liczby 2012^{2012} przez 11.

Zadanie 15.
Wyznaczyć ostatnie dwie cyfry liczby 2^{2012}.

Zadanie 16.
Wyznaczyć ostatnie trzy cyfry liczby 5^{2012}.

Zadanie 17.
Ile jest takich liczb n należących do zbioru $\{1,2,...,2007\}$, że liczba n^4-1 jest podzielna przez 9?

Zadanie 18.
Udowodnić, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych dodatnich n liczba $7\cdot 2^{2^n}+1$ jest złożona.

Zadanie 19.
Dana jest liczba pierwsza $p \geqslant 3$ oraz dwie liczby całkowite dodatnie a, b takie, że liczby $a+b$ oraz $a^{10}+b^{10}$ dzielą się przez p. Udowodnić, że a i b dzielą się przez p.

Zadanie 20.
Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $73^{6^n}-37^{6^n}$ dzieli się przez 35.

Zadanie 21.
Franek zbiera znaczki. Gdy pogrupował je po 12 na jednej stronie klasera, zostało mu 7 znaczków. Ile znaczków mu zostanie, gdy podzieli znaczki na grupy po 4?

Zadanie 22.
Ania i Basia wybrały wspólnie pewną liczbę. Gdy Ania podzieliła ją przez 9, otrzymała resztę 6. Gdy Basia podzieliła ją przez 12, otrzymała resztę 7. Uzasadnić, że co najmniej jedna z nich pomyliła się w obliczeniach.

Zadanie 23.
W pewnej klasie jest mniej niż 40 osób. Gdy uczniowie chcieli podzielić się na grupy 5-osobowe, 1 osoba została bez grupy. Gdy natomiast chcieli podzielić się na grupy 6-osobowe, 3 osoby zostały bez grupy. Ilu uczniów jest w tej klasie?

Zadanie 24.
Znaleźć resztę z dzielenia przez 55 liczby 2012^{2012}.

Podobieństwo trójkątów

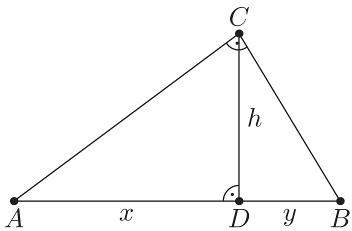
Urszula Pastwa i Joachim Jelisiejew

Wiele zadań z geometrii można rozwiązać, używając jedynie podobieństwa trójkątów. Kluczowe jest w nich przechodzenie pomiędzy różnymi cechami podobieństwa. Można w ten sposób uzyskać wiedzę o długościach boków trójkąta z wiedzy o jego kątach i na odwrót. Najprościej zobaczyć tę metodę w działaniu.

Zadanie 1. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość h i dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości x i y. Pokazać, że $xy = h^2$.

Rozwiązanie

Oznaczmy wierzchołki trójkąta przez A, B, C tak, że kąt przy C jest prosty. Niech D oznacza spodek wysokości opuszczonej na AB z wierzchołka C, patrz rys. 3.



Rysunek 3

Wtedy trójkąty ACD oraz CBD są podobne, na mocy cechy kąt-kąt-kąt, gdyż $\sphericalangle CAD = 90° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$ oraz $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BDC = 90°$. Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy równości

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \quad \text{czyli} \quad AD \cdot BD = CD^2, \quad \text{innymi słowy} \quad xy = h^2.$$

Zadanie 2. Dany jest równoległobok $ABCD$ o polu 24. Punkt M jest środkiem boku AD. Odcinki AC i BM przecinają się w punkcie S. Obliczyć stosunek długości odcinków AS i SC oraz wyznaczyć pola trójkątów AMS i CBS.

Rozwiązanie

Skoro $AD \parallel BC$, to $\sphericalangle MAS = \sphericalangle BCS$ oraz $\sphericalangle AMS = \sphericalangle CBS$, patrz rys. 4. Stąd trójkąty AMS i CBS są podobne. Z podobieństwa tego wynika równość

$$\frac{AS}{CS} = \frac{AM}{CB} = \frac{1}{2},$$

co kończy pierwszą część rozwiązania.

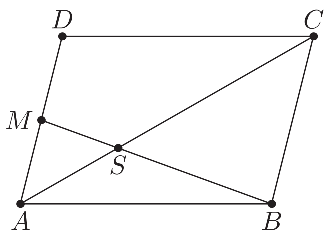
Z tego samego podobieństwa uzyskujemy $BS = 2MS$, więc

$$MB = 3MS. \tag{1}$$

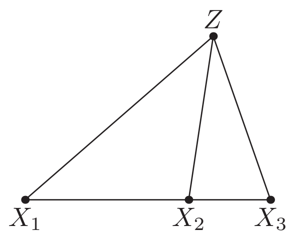
W dalszych rozważaniach pole trójkąta XYZ oznaczamy przez $[XYZ]$. Zauważmy, że jeżeli różne punkty X_1, X_2, X_3 leżą na jednej prostej, a punkt Z poza nią (patrz rys. 5), to zachodzi równość

$$\frac{[X_1X_2Z]}{[X_1X_3Z]} = \frac{X_1X_2}{X_1X_3}. \tag{2}$$

Aby dowieść tej zależności, obliczamy pola trójkątów: $[X_1X_2Z] = X_1X_2 \cdot h/2$ oraz $[X_1X_3Z] = X_1X_3 \cdot h/2$, gdzie h jest odległością punktu Z od prostej X_1X_3, i dzielimy otrzymane zależności stronami.



Rysunek 4



Rysunek 5

Korzystając z wzorów (2) i (1) otrzymujemy zależności

$$[AMB] = \frac{AM}{AD} \cdot [ADB] = \frac{AM}{AD} \cdot \frac{[ABCD]}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{2} = 6 \quad \text{oraz}$$
$$[AMS] = \frac{MS}{MB} \cdot [AMB] = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2.$$

Ponadto ze skali podobieństwa trójkątów AMS i CBS wynika równość pól $[CBS] = 2^2 \cdot [AMS] = 8$.

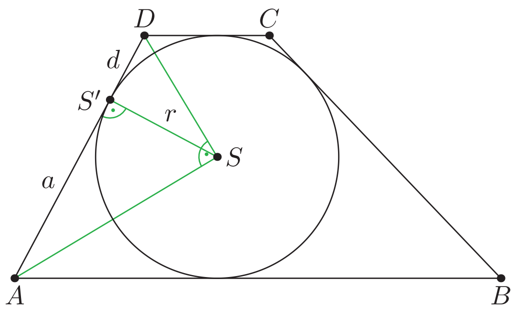
Zadanie 3. Na okręgu o środku S opisano trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Wykazać, że

$$\frac{1}{AS^2} - \frac{1}{BS^2} = \frac{1}{CS^2} - \frac{1}{DS^2}.$$

Rozwiązanie

Proste AS i DS są dwusiecznymi kątów w trapezie $ABCD$, więc zachodzi równość $\sphericalangle SDA + \sphericalangle SAD = (\sphericalangle CDA + \sphericalangle BAD)/2 = 180°/2 = 90°$ i trójkąt ASD jest prostokątny, patrz rys. 6.

Oznaczmy przez S' spodek wysokości SS' w trójkącie ASD i zdefiniujmy $a := AS'$, $d := DS'$, $r := SS'$. Korzystamy z zadania 1, otrzymując równość $r^2 = ad$.



Rysunek 6

Stosując twierdzenie Pitagorasa, obliczamy

$$\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{DS^2}=\frac{1}{a^2+r^2}+\frac{1}{d^2+r^2}=\frac{1}{a^2+ad}+\frac{1}{d^2+ad}=$$
$$=\frac{1}{a+d}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{a+d}\,\frac{a+d}{ad}=\frac{1}{ad}=\frac{1}{r^2}.$$

Podobnie dowodzimy, że $1/BS^2+1/CS^2=1/r^2$. Łącznie

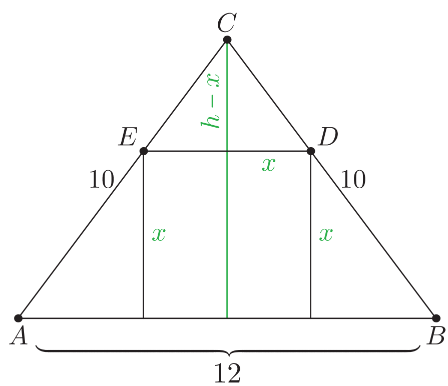
$$\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{DS^2}=\frac{1}{r^2}=\frac{1}{BS^2}+\frac{1}{CS^2},$$

skąd wynika teza zadania.

Zadanie 4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym zachodzą równości $AB=12$ oraz $AC=BC=10$. Obliczyć długość boku kwadratu, którego dwa wierzchołki należą do odcinka AB, a po jednym z pozostałych wierzchołków — do ramion AC i BC.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x szukaną długość boku kwadratu. Zauważmy, że bok kwadratu równoległy do AB odcina z trójkąta ABC trójkąt EDC podobny do niego, patrz rys. 7.



Rysunek 7

Oznaczmy przez h długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C na bok AB. Z twierdzenia Pitagorasa $h=\sqrt{10^2-6^2}=8$. Wobec tego długość wysokości opuszczonej z C w trójkącie EDC to $8-x$. Z podobieństwa trójkątów EDC i ABC otrzymujemy zależność
$$\frac{8-x}{8}=\frac{x}{12},$$
stąd $x=24/5$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 5.

W trójkącie równoramiennym ABC dane są $AC=BC=10$, $AB=12$. Obliczyć odległość środka wysokości CD od ramienia AC.

Zadanie 6.

Pokazać, że środkowe w trójkącie dzielą się w stosunku $1:2$.

Zadanie 7.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=10$, $AC=BC=20$. Obliczyć długość odcinka łączącego punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt do boków AC i BC.

Zadanie 8.

Dany jest trapez $ABCD$ o polu 15 i podstawach AB i CD. Dwusieczna kąta ABC jest prostopadła do ramienia AD i przecina je w takim punkcie E, że $\frac{AE}{ED}=2$. Obliczyć pola figur ABE i $EBCD$, na które został podzielony trapez.

Zadanie 9.

Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt M jest środkiem odcinka AD, zaś punkty K i L dzielą odcinek BC na równe odcinki BK, KL, LC. Odcinki KM i LM przecinają przekątną AC odpowiednio w punktach X i Y. Obliczyć stosunek długości odcinków AX i XY.

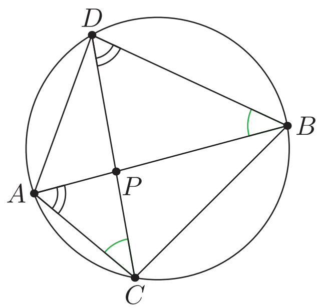
Zadanie 10.

W trójkąt ostrokątny ABC wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki należą do boku AB, a dwa pozostałe do pozostałych boków trójkąta. Udowodnić, że pole tego kwadratu nie przekracza połowy pola trójkąta ABC.

Potęga punktu względem okręgu

Zadanie 11. Dane są punkty A, B, C, D leżące na okręgu. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Pokazać, że $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Rozwiązanie



Rysunek 8

Rozważmy sytuację, gdy punkt P leży wewnątrz okręgu, patrz rys. 8. Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku są równe, więc $\sphericalangle ACP = \sphericalangle DBP$ oraz $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BDP$. Wobec tego trójkąty ACP i DBP są podobne na mocy cechy kąt-kąt-kąt i zachodzi równość

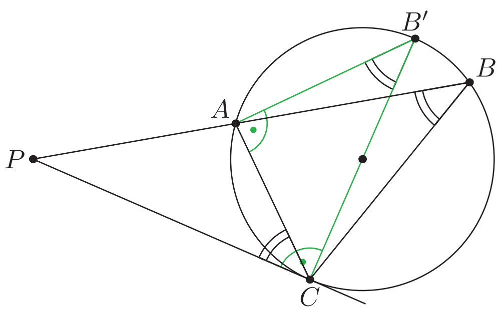
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}, \quad \text{skąd} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Dowód w sytuacji, gdy P leży poza okręgiem jest podobny i pozostawiamy go, jako ćwiczenie, Czytelnikowi.

Zadanie 12. Dane są punkty A, B, C leżące na okręgu. Styczna do tego okręgu w punkcie C oraz prosta AB przecinają się w punkcie P, przy czym $PA < PB$. Pokazać, że

1. $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC$,
2. $PA \cdot PB = PC^2$.

Rozwiązanie



Rysunek 9

1. Niech $B'C$ będzie średnicą okręgu, patrz rys. 9. Wtedy kąty $\sphericalangle PCB'$ oraz $\sphericalangle CAB'$ są proste, więc

$$\sphericalangle PCA = 90^\circ - \sphericalangle B'CA = \sphericalangle AB'C.$$

Ale $\sphericalangle AB'C = \sphericalangle ABC$, gdyż kąty te są wpisane w okrąg i oparte na tym samym łuku. Skoro $PA < PB$, to punkty P, A, B leżą na prostej PB w tej kolejności, więc $\sphericalangle ABC = \sphericalangle PBC$ i ostatecznie $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC$.

2. Trójkąty PAC i PCB mają wspólny kąt przy wierzchołku P oraz równej miary kąty $\sphericalangle PCA$ i $\sphericalangle PBC$, więc są podobne. Wobec tego

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}, \quad \text{a stąd} \quad PA \cdot PB = PC^2,$$

co kończy dowód.

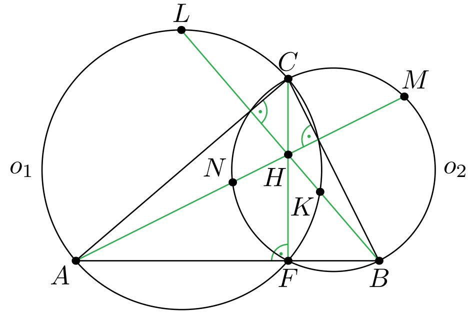
Punkt 1 z tezy zadania 12 jest znany jako *twierdzenie o kącie wpisanym i dopisanym*. Tezy zadań 12.2 i 11 są faktami, które będziemy wykorzystywać w kolejnych rozwiązaniach. Warto spojrzeć na nie wspólnie: dla zadanego punktu P i okręgu o niech k będzie pewną prostą przechodzącą przez P, zaś A i B — punktami przecięcia prostej k z okręgiem o (być może $A = B$). Wówczas iloczyn $PA \cdot PB$ jest niezależny od wyboru prostej k.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne: jeśli punkt P jest punktem przecięcia odcinków AB i CD (lub P jest punktem przecięcia prostych AB i CD, przy czym P leży poza obydwoma odcinkami AB, CD) oraz zachodzi $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, to punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu. Podobnie, jeśli B leży na półprostej PA oraz $PC^2 = PA \cdot PB$ dla pewnego punktu C nie leżącego na prostej AB, to prosta PC jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Iloczyn $PA \cdot PB$ (brany ze znakiem minus, gdy P leży wewnątrz okręgu o), nazywamy *potęgą punktu* P względem okręgu o.

Zadanie 13. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Odcinki AC i BC są średnicami odpowiednio okręgów o_1 i o_2. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do prostej AC przecina okrąg o_1 w punktach K i L, zaś prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej BC przecina okrąg o_2 w punktach M i N. Wykazać, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez F rzut punktu C na odcinek AB, patrz rys. 10.



Rysunek 10

Ponieważ $\sphericalangle AFC = \sphericalangle BFC = 90°$, więc punkt F leży na okręgach o_1, o_2.

Proste KL i MN zawierają dwie z wysokości trójkąta ABC, więc przecinają się w punkcie H leżącym na trzeciej wysokości, czyli na odcinku CF.

Stosując zadanie 11 do okręgów o_1 i o_2, uzyskujemy

$$HK \cdot HL = HC \cdot HF = HM \cdot HN.$$

Wobec tego, na mocy uwagi powyżej, punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 14.

Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach E i F. Przez punkt P, należący do prostej EF, poprowadzono proste styczne do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że $PK = PL$.

Zadanie 15.

Dany jest okrąg o. Przez punkt P poprowadzono prostą styczną do o w punkcie A oraz prostą przecinającą ten okrąg w takich punktach B i C, że $PB = BC$. Dana jest długość $PA = 1$. Obliczyć długość odcinka PB.

Zadanie 16.

Dany jest trójkąt ABC. Punkty E i F należą odpowiednio do jego boków AC i AB. Odcinki BE i CF przecinają się w punkcie M, przy czym

$$ME \cdot MB = MC \cdot MF.$$

Wykazać, że $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.

W poszukiwaniu okręgów

Marta Kamińska, Tomasz Szymczyk i Joachim Jelisiejew

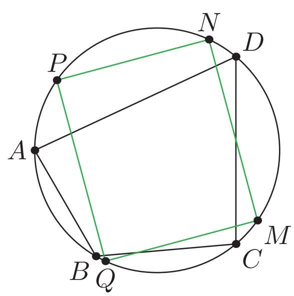
Przy rozwiązywaniu zadań geometrycznych ważna jest spostrzegawczość. Zaproponowane w tym artykule zadania mają na celu ćwiczenie umiejętności dostrzegania na rysunkach okręgów przechodzących przez dane punkty. Okręgi takie mają mnóstwo ciekawych własności, które mogą być pomocne przy rozwiązaniu zadań. Przypomnijmy najważniejsze z tych własności oraz warunki wystarczające na to, by cztery punkty leżały na jednym okręgu.

Garść przydatnych faktów

1. Kąt wpisany w okrąg ma miarę o połowę mniejszą niż kąt środkowy oparty na tym samym łuku. W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.
2. Dwa kąty wpisane w ten sam okrąg mają równe miary wtedy i tylko wtedy, gdy łuki, na których te kąty są oparte, są przystające.
3. Kąt dopisany do okręgu ma taką samą miarę jak kąt wpisany w ten okrąg oparty na tym samym łuku (*kąt dopisany* oparty na łuku AB okręgu to kąt wypukły pomiędzy cięciwą AB a styczną w punkcie A do okręgu, zawierający łuk AB).
4. Czworokąt można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar jego przeciwległych kątów wynosi $180°$.
5. Jeśli punkty B i C leżą po tej samej stronie prostej AD oraz zachodzi równość $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, to punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.
6. Jeśli kąty ABD i ACD są proste, to punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.

Zadanie 1. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω. Dwusieczne kątów $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle DCB$, $\sphericalangle ADC$ przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach M, N, P i Q. Wykazać, że punkty M, N, P, Q są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie



Rysunek 11

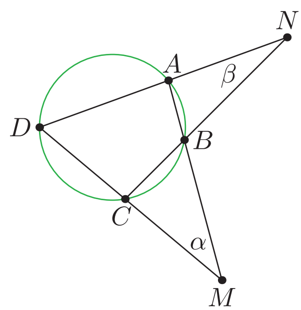
Wystarczy pokazać, że PM i NQ są średnicami okręgu opisanego na

$ABCD$, patrz rys. 11. Z faktu 2 oraz definicji punktu M wynika, że jest on środkiem łuku BD nie zawierającego A. Analogicznie punkt P jest środkiem łuku BD nie zawierającego C. Tak więc symetralna odcinka BD przechodzi przez punkty P i M. Symetralna ta zawiera średnicę okręgu ω, gdyż BD jest jego cięciwą. Zatem odcinek PM jest średnicą ω, podobnie dowodzimy, że QN jest średnicą ω.

Zadanie 2. Czworokąt wypukły $ABCD$, nie będący trapezem, jest wpisany w okrąg. Półproste AB i DC przecinają się w punkcie M, a półproste DA i CB przecinają się w punkcie N. Wyznaczyć kąty czworokąta $ABCD$, jeżeli $\sphericalangle AMD = \alpha$ i $\sphericalangle ANB = \beta$.

Rozwiązanie

Skoro czworokąt jest wpisany w okrąg, to $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$, patrz rys. 12.



Rysunek 12

Rozważmy kąty w trójkątach ADM oraz CDN. Otrzymujemy zależności $\sphericalangle A + \sphericalangle D + \alpha = 180°$ oraz $\sphericalangle D + \sphericalangle C + \beta = 180°$. Stąd, wobec wcześniejszych równości, uzyskujemy

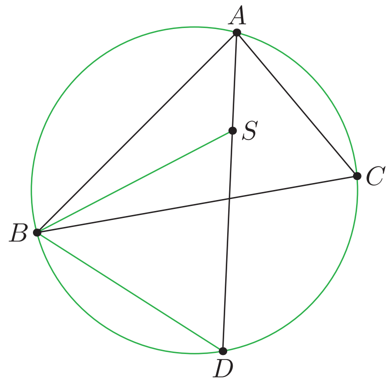
$$\sphericalangle D = \frac{180° - \alpha - \beta}{2}, \sphericalangle A = \frac{180° - \alpha + \beta}{2}, \sphericalangle C = \frac{180° + \alpha - \beta}{2}, \sphericalangle B = \frac{180° + \alpha + \beta}{2}.$$

Zadanie 3. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku S. Prosta AS przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D, innym niż A. Wykazać, że jeżeli $\sphericalangle ACB = 60°$, to trójkąt BDS jest równoboczny.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA = 60°$, patrz rys. 13. Wobec tego wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle SBD = \sphericalangle BSD$, wtedy trójkąt BDS jest równoramienny o kącie $\sphericalangle BDS = 60°$, więc jest równoboczny.

Zachodzą równości $\sphericalangle SBC = \sphericalangle SBA$ oraz $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAS$. Mamy zatem $\sphericalangle SBD = \sphericalangle SBC + \sphericalangle CBD = \sphericalangle SBA + \sphericalangle BAS = 180° - \sphericalangle BSA = \sphericalangle BSD$. To kończy dowód.



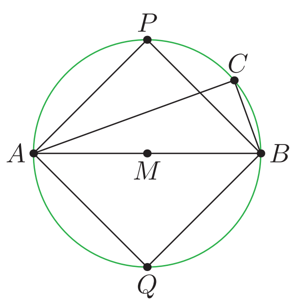
Rysunek 13

Z rozwiązania wynika, że niezależnie od miary kąta BDS zachodzi równość $\sphericalangle SBD = \sphericalangle BSD$, a więc także $BD = SD$. Ten fakt przydaje się w wielu zadaniach olimpijskich.

Zadanie 4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$ oraz $AC \neq BC$. Punkty P i Q są wierzchołkami kwadratu $APBQ$. Pokazać, że proste CP i CQ są prostopadłe.

Rozwiązanie

Niech M będzie środkiem boku AB, patrz rys. 14.



Rysunek 14

Skoro $AQBP$ jest kwadratem, to M jest środkiem okręgu opisanego na nim. Z drugiej strony, M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Tak więc punkty A, Q, B, C i P leżą na jednym okręgu o środku w M. Kąt PCQ jest wpisany w ten okrąg i oparty na średnicy PQ, czyli jest prosty.

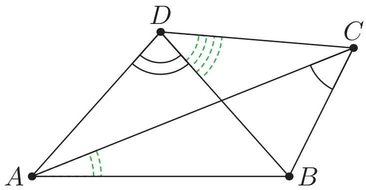
Zadanie 5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle ADB = 2\sphericalangle ACB \text{ oraz } \sphericalangle BDC = 2\sphericalangle BAC.$$

Udowodnić, że $AD = DC$.

Rozwiązanie

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Skoro $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB/2 < 180°/2 = 90°$, to punkty C i O leżą po tej samej stronie prostej AB. Punkt D leży po tej samej stronie AB co C, więc D i O leżą po tej samej stronie prostej AB. Skoro $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$, to punkty A, B, D, O leżą na jednym okręgu; nazwijmy go ω_1. Identycznie dowodzimy, że punkty B, C, D, O leżą na jednym okręgu; nazwijmy go ω_2.



Rysunek 15

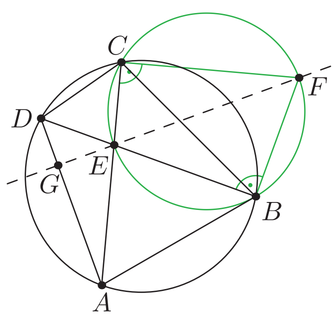
Załóżmy, że $\omega_1 = \omega_2$. Wtedy ω_1 jest okręgiem przechodzącym przez A, B, C, więc o środku w O, a jednocześnie O leży na tym okręgu, sprzeczność. Tak więc $\omega_1 \neq \omega_2$. Punkty przecięcia tych dwóch okręgów to B, D i O, ale mamy $O \neq B$ i $B \neq D$, więc $D = O$. Stąd AD i DC są równe jako promienie okręgu opisanego na ABC.

Zadanie 6. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie E, przy czym kąt BEC jest rozwarty. Prosta przechodząca przez punkt C i prostopadła do prostej AC przecina prostą przechodzącą przez punkt B i prostopadłą do prostej BD w punkcie F. Wykazać, że proste EF i AD są prostopadłe.

Rozwiązanie

Punkty B, E, C, F leżą na okręgu o średnicy EF. Skoro kąt wpisany BEC jest rozwarty, to punkty B i C leżą na różnych półokręgach wyznaczonych przez średnicę EF. Wobec tego punkt F leży wewnątrz kąta $\sphericalangle BEC$.

Oznaczmy przez G punkt przecięcia prostej EF z bokiem AD, patrz rys. 16.



Rysunek 16

Skoro na czworokącie $BECF$ można opisać okrąg, to zachodzą równości $\sphericalangle AEG = \sphericalangle FEC = \sphericalangle FBC$. Co więcej, $\sphericalangle EAG = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$. Stąd wynika

$$\sphericalangle AEG + \sphericalangle EAG = \sphericalangle FBC + \sphericalangle CBD = 90^\circ,$$

a więc $\sphericalangle AGE = 90^\circ$, co kończy rozwiązanie.

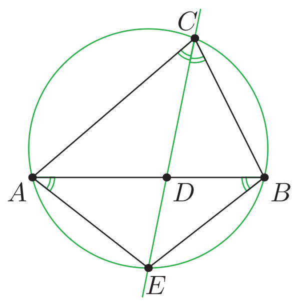
Zadanie 7. Udowodnij *twierdzenie o dwusiecznej:*

Dany jest trójkąt ABC. Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta przy wierzchołku C z bokiem AB. Wówczas zachodzi równość

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez E punkt przecięcia dwusiecznej CD z okręgiem opisanym na trójkącie ABC, patrz rys. 17.



Rysunek 17

Wówczas $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCE = \sphericalangle BAE = \sphericalangle DAE$ oraz $\sphericalangle AEC = \sphericalangle DEA$, zatem trójkąty ACE i DAE są podobne, na mocy cechy kąt-kąt-kąt. Z tego podobieństwa otrzymujemy równość $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{AE}$. Analogicznie można wykazać, że $\frac{BD}{BC} = \frac{DE}{BE}$.

Ponieważ kąty ACE i BCE są przystające, to $AE = BE$. W efekcie uzyskujemy

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{BE} = \frac{BD}{BC},$$

co jest równoważne równości z tezy twierdzenia.

Zadanie 8. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Okręgi styczne do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B przechodzą przez punkt D i przecinają się po raz drugi w punkcie E. Punkt F jest odbiciem symetrycznym wierzchołka C względem symetralnej boku AB. Wykazać, że punkty D, E i F są współliniowe.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez F' punkt przecięcia prostej DE z okręgiem opisanym na trójkącie ABC, patrz rys. 18. Wystarczy wykazać, że $F = F'$.

Udowodnimy najpierw, że punkt E leży po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C. Załóżmy przeciwnie. Z twierdzenia o kącie wpisanym i dopisanym wynika wtedy, że $\sphericalangle AED$ i $\sphericalangle BED$ są rozwarte, więc w trójkącie AEB mamy

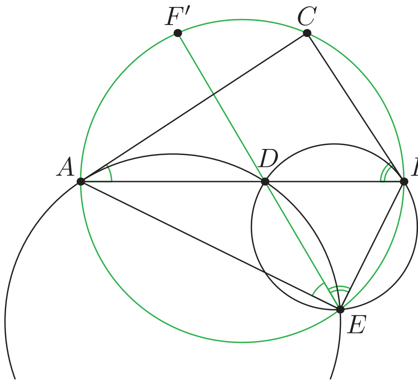
$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED + \sphericalangle BED > 180^\circ$$

co jest nonsensem.

Skoro E leży po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C, to na mocy twierdzenia o kącie wpisanym i dopisanym zachodzi $\sphericalangle AED = \sphericalangle BAC$ oraz $\sphericalangle BED = \sphericalangle ABC$. Wobec tego

$$\sphericalangle AEB + \sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180°,$$

więc punkty A, B, C, E leżą na jednym okręgu.



Rysunek 18

Wynika stąd równość kątów $\sphericalangle F'AB = \sphericalangle F'EB = \sphericalangle DEB = \sphericalangle CBA$. Podobnie $\sphericalangle F'BA = \sphericalangle F'EA = \sphericalangle CAB$. Wobec tego punkty A, B, C, F' są wierzchołkami trapezu równoramiennego. Podstawy CF' i AB tego trapezu mają wspólną symetralną, więc punkt F' jest symetryczny do punktu C względem symetralnej odcinka AB, czyli $F = F'$, co kończy dowód.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 9.

Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Półproste AD i BC przecinają się w punkcie P. Wykazać, że

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle ADB - \sphericalangle CAD.$$

Zadanie 10.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω. Wykazać, że dwusieczne kątów $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle ADB$ przecinają się w punkcie leżącym na okręgu ω.

Zadanie 11.

Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt A poprowadzono prostą, która przecina dane okręgi w punktach C i D, przy czym punkt A jest punktem wewnętrznym odcinka CD. W punktach C i D poprowadzono styczne do tych okręgów, które przecinają się w punkcie E. Wykazać, że punkty B, C, D, E leżą na jednym okręgu.

Zadanie 12.

Czworokąt $ABCD$, nie będący trapezem, jest wpisany w okrąg. Półproste AB i DC przecinają się w punkcie M, a półproste DA i CB przecinają się w punkcie N. Wykazać, że dwusieczne kątów $\sphericalangle AMD$ i $\sphericalangle ANB$ są prostopadłe.

Zadanie 13.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 45°$. Niech H będzie punktem przecięcia wysokości w tym trójkącie. Wykazać, że $AH = BC$.

Zadanie 14.

Wykazać, że odbicie symetryczne punktu przecięcia wysokości trójkąta względem prostej zawierającej dowolny bok leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.

Zadanie 15.

Niech H będzie punktem przecięcia wysokości trójkąta nieprostokątnego ABC. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AHB, BHC i CHA są przystające.

Zadanie 16.

Dany jest trójkąt ABC. Niech K, L, M będą środkami łuków BC, CA i AB (nie zawierających wierzchołków trójkąta) okręgu opisanego na ABC. Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta KLM i środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC pokrywają się.

Zadanie 17.

Dany jest trójkąt ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i B przecinają boki trójkąta odpowiednio w punktach P i Q. Niech M i N będą rzutami prostopadłymi punktów P i Q na bok AB. Znaleźć miarę kąta MCN.

Zadanie 18.

Punkty A, B i C leżą na jednej prostej (w podanej kolejności), przy czym $AB < BC$. Punkty D i E są wierzchołkami kwadratu $ABDE$. Okrąg o średnicy AC przecina prostą DE w punktach P i Q (P leży na odcinku DE). Niech R będzie punktem przecięcia prostych AQ i BD. Wykazać, że $DP = DR$.

Zadanie 19.

Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

Nierówność trójkąta i jej zastosowania

Joanna Jaszuńska

Nierówność trójkąta orzeka, iż dla dowolnych trzech punktów A, B, C

$$AC + CB \geqslant AB.$$

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy punkt C należy do odcinka AB.

Choć wydawać się może niepozorna, nierówność ta ma wiele ciekawych zastosowań i przydaje się w różnorodnych zadaniach. W niniejszym tekście prezentujemy kilka rodzajów problemów, w rozwiązaniu których bywa ona pomocna.

Budowanie trójkątów

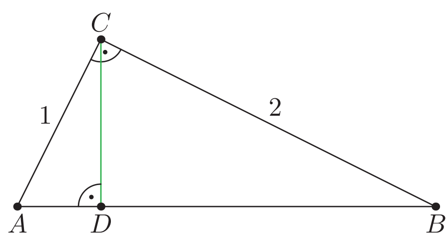
Czy z danych trzech odcinków można zbudować trójkąt? Jedną z metod, by się o tym przekonać, jest sprawdzenie nierówności trójkąta. Warto pamiętać, że aby odpowiedź była pozytywna, spełnione muszą być aż trzy ostre nierówności: suma długości każdych dwóch odcinków ma być większa od długości trzeciego. Oczywiście jeśli którakolwiek z tych nierówności nie zachodzi, odpowiedź jest negatywna.

Inną metodą, by uzasadnić, że z danych odcinków można zbudować trójkąt, jest... zbudowanie go. Czasem jest to znacznie prostsze niż zmaganie się z nierównościami!

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC. Czy z odcinków o długościach równych jego wysokościom zawsze można zbudować trójkąt?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że nie dla każdego trójkąta z odcinków o długościach równych jego wysokościom można zbudować trójkąt. W tym celu wskażemy przykład takiego trójkąta, w którym suma pewnych dwóch wysokości jest mniejsza od trzeciej, czyli nie spełniają one nierówności trójkąta.



Rysunek 19

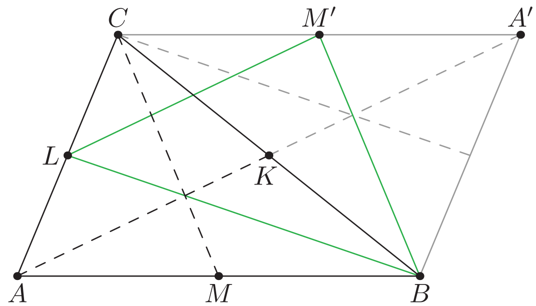
Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $AC = 1$ oraz $BC = 2$ (rys. 19); są one zarazem wysokościami tego trójkąta. Spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka C oznaczmy przez D. Wówczas trójkąt ACD

jest prostokątny, więc jego przyprostokątna CD jest krótsza od przeciwprostokątnej AC, czyli $CD < 1$. Stąd $CD+1 < 2$. Oznacza to, że $CD+AC < BC$, więc z odcinków o długościach CD, AC, BC nie można zbudować trójkąta.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC. Czy z odcinków o długościach równych jego środkowym zawsze można zbudować trójkąt?

Rozwiązanie

Pokażemy, w jaki sposób dla dowolnego trójkąta ABC można zbudować trójkąt z odcinków o długościach równych jego środkowym.



Rysunek 20

Niech punkt A' będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $CABA'$, natomiast K — wspólnym środkiem jego przekątnych AA' oraz BC (rys. 20). Oznaczmy odpowiednio przez L i M' środki odcinków CA i CA', wówczas

$$LM' = \frac{1}{2}AA' = AK.$$

Niech M będzie środkiem boku AB. Wtedy odcinki MB oraz $M'C$ są równe i równoległe, zatem $MBM'C$ jest równoległobokiem, więc $BM' = CM$. Wobec powyższego trójkąt $M'LB$ ma boki o długościach $LM' = AK$, BL oraz $BM' = CM$, co kończy dowód.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt ABC. Czy z odcinków o długościach równych dwusiecznym jego kątów zawsze można zbudować trójkąt?

Zadanie 4.

Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ o podstawie $ABCD$ i krawędziach bocznych AE, BF, CG, DH. Punkt S jest środkiem krawędzi EH. Udowodnij, że z odcinków o długościach AG, CH, $2 \cdot AS$ można zbudować trójkąt.

Zadanie 5.

Wykaż, że w każdym pięciokącie wypukłym istnieją takie trzy różne przekątne, z których można zbudować trójkąt.

Zadanie 6. (LVIII OM, II etap, zadanie 2)

Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$BC = CD, \quad DE = EA, \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ.$$

Wykaż, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt oraz wyznacz miary jego kątów, znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC.

Nierówności

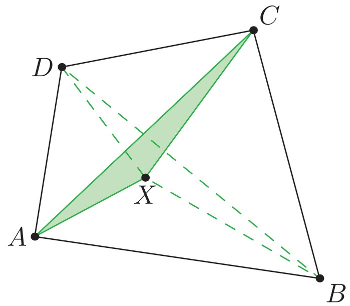
Często nierówność trójkąta przydaje się w zadaniach, w których należy udowodnić inną nierówność, niekoniecznie na pierwszy rzut oka bezpośrednio związaną z trójkątami.

Warto pamiętać, że jeśli zamiast wierzchołków trójkąta rozważamy trzy punkty A, B, C, które mogą być współliniowe, to nierówność trójkąta zachodzi w przytoczonej na początku artykułu postaci nieostrej: $AC + CB \geqslant AB$.

Zadanie 7. Wewnątrz czworokąta wypukłego znajdź punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że szukanym punktem jest punkt przecięcia przekątnych czworokąta. Niech X będzie dowolnym punktem wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ (rys. 21).



Rysunek 21

Z nierówności trójkąta dla trójkąta ACX wynika, iż

$$AX + CX \geqslant AC,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X należy do odcinka AC. Analogicznie

$$BX + DX \geqslant BD$$

i równość zachodzi jedynie dla punktu X leżącego na przekątnej BD danego czworokąta.

Dodając stronami powyższe nierówności, stwierdzamy, iż

$$AX+BX+CX+DX \geqslant AC+BD.$$

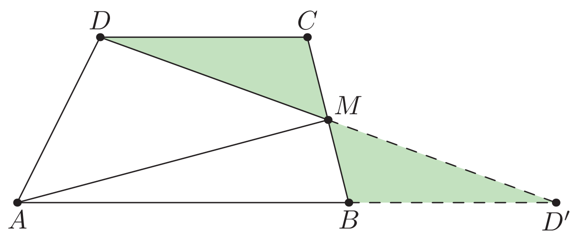
Oznacza to, że dla dowolnego punktu X wewnątrz czworokąta, suma jego odległości od wierzchołków jest większa bądź równa sumie długości przekątnych, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X należy jednocześnie do obu przekątnych, czyli jest ich punktem przecięcia. To jest zatem punkt, dla którego rozważana suma jest najmniejsza.

Zadanie 8. W trapezie $ABCD$ punkt M jest środkiem ramienia BC. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$AM+MD>AB+CD.$$

Rozwiązanie

Niech trójkąt $BD'M$ będzie obrazem symetrycznym trójkąta CDM w symetrii względem punktu M (rys. 22). Otrzymujemy równości $MD'=MD$ oraz $BD'=CD$.



Rysunek 22

Trójkąt $AD'M$ nie jest zdegenerowany, więc zachodzi ostra nierówność trójkąta

$$AM+MD'>AD'=AB+BD'.$$

Stąd na mocy powyższych równości uzyskujemy żądaną nierówność.

Zadanie 9.

Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejne boki mają długości: 48, 49, 50, 51. Wykaż, że suma długości przekątnych tego czworokąta jest większa od 100.

Zadanie 10. (II OMG, I etap, zadanie 4)

W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle ACB=120^\circ$. Udowodnij, że

$$CM \geqslant \frac{\sqrt{3}}{6}AB.$$

Zadanie 11. (VI OMG, III etap, zadanie 5)

Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P, dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$

Uogólniona nierówność trójkąta dla łamanych

Na nierówność trójkąta można spojrzeć następująco:

Dowolna łamana złożona z odcinków AC i CB jest dłuższa od odcinka AB lub jest równa AB, jeśli pokrywa się z tym odcinkiem.

To nieco dziwne sformułowanie ma wielką zaletę — w naturalny sposób prowadzi do uogólnienia nierówności trójkąta dla łamanych o dowolnej liczbie odcinków:

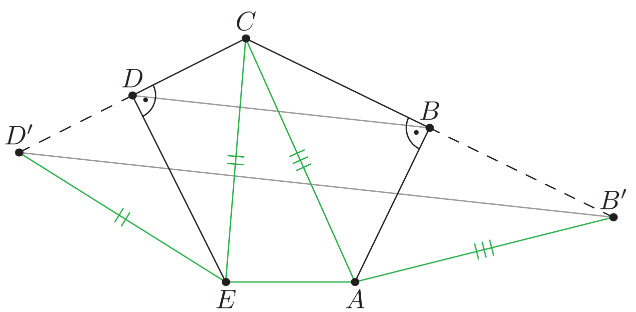
Dowolna łamana o końcach A i B jest dłuższa od odcinka AB lub jest równa AB, jeśli pokrywa się z tym odcinkiem.

Uogólnienie to ma wiele ciekawych zastosowań, których przykłady przedstawiamy w tej i następnych częściach artykułu.

Zadanie 12. (VII OMG, I etap, zadanie 5)
W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2 \cdot BD$.

Rozwiązanie

Odbijmy trójkąt ABC symetrycznie względem prostej AB; obraz punktu C oznaczmy przez B' (rys. 23). Wówczas $CA = B'A$ oraz punkt B jest środkiem odcinka CB' (bo kąt ABC jest prosty).



Rysunek 23

Analogicznie definiujemy punkt D' jako obraz punktu C w symetrii względem prostej DE; wówczas $EC = ED'$ oraz punkt D jest środkiem odcinka CD'. Wobec powyższego w trójkącie $B'CD'$ zachodzi równość $B'D' = 2 \cdot BD$. Mamy więc $CA + AE + EC = B'A + AE + ED' \geqslant B'D' = 2 \cdot BD$, co kończy dowód.

Zadanie 13.

Udowodnij uogólnienie nierówności trójkąta: dowolna łamana o końcach A i B jest dłuższa od odcinka AB lub jest równa AB, jeśli pokrywa się z tym odcinkiem.

Zadanie 14.

Odległość z Petersburga do Moskwy wynosi 660 km. Z Petersburga do miasta Likowo jest 310 km, z Likowa do Klinu jest 200 km, zaś z Klinu do Moskwy jest 150 km. Jaka jest odległość z Likowa do Moskwy?

Zadanie 15.

W czworokącie $ABCD$ kąt BAD jest prosty. Udowodnij, że

$$BC+CD+DB \geqslant 2\cdot AC.$$

Zastosowania w zadaniach przestrzennych

Zadania dotyczące wielościanów często łatwo sprowadzić do problemów płaskich, na przykład poprzez analizowanie siatki rozważanej bryły. Siatkę tę warto dobierać starannie, bo odpowiedni jej wybór to często klucz do sukcesu. Jeśli w zadaniu mowa jest o nierównościach, przydać się może oczywiście nierówność trójkąta lub jej uogólniona wersja dla łamanych.

Zadanie 16. (II OMG, II etap, zadanie 5)

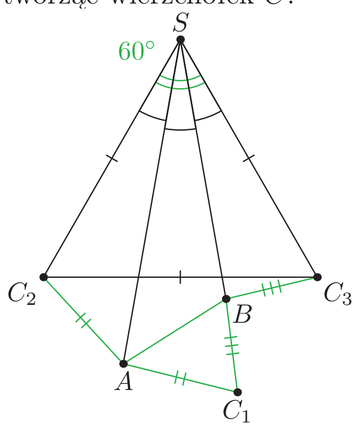
Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$, w którym

$$\sphericalangle ASB=\sphericalangle BSC=\sphericalangle CSA=20^\circ.$$

Wykaż, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi AS, BS i CS.

Rozwiązanie

Rozważmy siatkę danego ostrosłupa przedstawioną na rysunku 24; punkty C_1, C_2, C_3 sklejają się, tworząc wierzchołek C.



Rysunek 24

W trójkącie C_2C_3S zachodzą równości $C_2S = C_3S$ oraz

$$\sphericalangle C_2SC_3 = \sphericalangle C_2SA + \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC_3 = 20^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 60^\circ,$$

więc trójkąt ten jest równoboczny. Stąd odcinek C_2C_3 ma długość taką, jak krawędź CS danego ostrosłupa.

Z uogólnionej nierówności trójkąta otrzymujemy więc

$$CA + AB + BC = C_2A + AB + BC_3 \geqslant C_2C_3 = CS.$$

Dowód dla krawędzi AS i BS przebiega analogicznie.

Zadanie 17. (V OMG, I etap, zadanie 6)

Czworościan foremny o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki jest najmniejszy możliwy obwód tego czworokąta?

Zadanie 18.

Dany jest graniastosłup prosty czworokątny o podstawie $ABCD$ i krawędziach bocznych AK, BL, CM, DN. Dane są długości krawędzi podstawy: $AB = 11$, $BC = 4$, $CD = 9$, $DA = 7$. Po powierzchni tego graniastosłupa poprowadzone zostały dwie drogi z punktu A do punktu M. Pierwsza to najkrótsza droga spośród dróg przecinających krawędź BL, druga to najkrótsza droga spośród dróg przecinających krawędź DN. Która z tych dwóch dróg jest krótsza?

Zadanie 19.

Na przeciwległych wierzchołkach sześciennego pudła o krawędzi 1 siedzą pająk i mucha. Pająk chce przejść najkrótszą możliwą drogą po powierzchni pudła do wierzchołka, w którym znajduje się mucha. Jak długą drogę musi pokonać? Którędy powinien iść? Ile ma do wyboru różnych najkrótszych dróg?

Twierdzenie Pitagorasa

Ostatnia część niniejszego tekstu poświęcona jest zadaniom, w których prócz nierówności trójkąta lub jej uogólnionej wersji dla łamanych, przydatne jest również twierdzenie Pitagorasa. Warto o nim pamiętać nie tylko wtedy, kiedy w zadaniu występują trójkąty prostokątne, ale również gdy pojawiają się na przykład odcinki o długościach wyrażonych wzorami typu $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Zadanie 20. Wykaż, że z odcinków o długościach $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ i $\sqrt{13}$ można zbudować trójkąt i wyznacz jego pole.

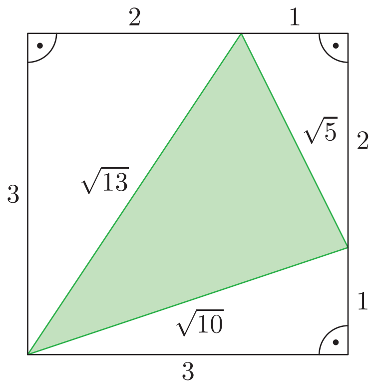
Rozwiązanie

Sposób 1. Aby przekonać się, że z odcinków o danych długościach można zbudować trójkąt, wystarczy sprawdzić, że $\sqrt{5} + \sqrt{10} > \sqrt{13}$, pozostałe dwie nierówności trójkąta są bowiem spełnione w sposób oczywisty. Nietrudno przeprowadzić stosowne rachunki (na przykład szacując lub podnosząc do kwadratu obie strony nierówności), pozostaje jednak problem z wyznaczeniem pola. Można posłużyć się wzorem Herona, wyrażającym pole trójkąta w zależności od długości jego boków i prowadzi to rzecz jasna do rozwiązania zadania, jednakże konieczne do wykonania obliczenia są tym razem dość kłopotliwe. Postąpmy więc inaczej.

Sposób 2. Zauważmy, że

$$\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}, \quad \sqrt{10}=\sqrt{1^2+3^2}, \quad \sqrt{13}=\sqrt{2^2+3^2}.$$

Oznacza to, że każdy z danych w zadaniu odcinków jest długością przeciwprostokątnej pewnego trójkąta, którego przyprostokątne mają długości całkowite. Co więcej, możliwe jest ustawienie tych trzech trójkątów tak, jak przedstawia rysunek 25.



Rysunek 25

Pierwsza część zadania została więc rozwiązana — widoczny w środkowej części rysunku kolorowy trójkąt jest tym, którego istnienie należało wykazać.

Szukane pole naszego trójkąta jest różnicą pola całego prostokąta i pól trzech trójkątów prostokątnych, co tym razem nietrudno obliczyć:

$$3\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=9-1-\frac{3}{2}-3=\frac{7}{2}.$$

Zadanie 21.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d z odcinków o długościach

$$\sqrt{b^2+c^2+d^2+2bc}, \quad \sqrt{a^2+c^2+d^2+2ad}, \quad \sqrt{a^2+b^2}$$

można zbudować trójkąt i że jego pole jest równe $\frac{1}{2}(ab+ac+bd)$.

Zadanie 22.

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

Zadanie 23.

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\geqslant\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}.$$

Jak dowodzić nierówności

Adam Osękowski, Hanna Saeki i Joachim Jelisiejew

Istnieje szereg technik oraz twierdzeń pozwalających dowodzić oszacowania rozmaitych typów, są to m.in.: nierówności między średnimi, nierówność Jensena, twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych oraz spora część rachunku różniczkowego. Naszym celem jest zaprezentowanie bardzo elementarnego podejścia, opartego wyłącznie na podstawowych algebraicznych przekształceniach i nierówności $(a-b)^2 \geqslant 0$, którą będziemy zapisywać

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab.$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b. Dla wygody, będziemy ją nazywać *podstawową nierównością*.

Część poniższych zadań pochodzi z zawodów Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b zachodzi nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Liczba $\frac{a+b}{2}$ jest *średnią arytmetyczną* liczb a i b, zaś liczba $\sqrt{ab}$ jest ich *średnią geometryczną*, dlatego powyższa nierówność nazywana jest *nierównością między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną*.

Rozwiązanie

Sposób 1. Skoro obie strony danej nierówności są nieujemne, to po podniesieniu jej obustronnie do kwadratu dostaniemy nierówność równoważną. Zatem wystarczy udowodnić, że prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geqslant ab,$$

która jest równoważna nierówności $a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$, czyli nierówności podstawowej.

Sposób 2. Nierówność z zadania możemy też udowodnić bez podnoszenia jej obustronnie do kwadratu. Nierówność podstawowa zapisana dla liczb $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ to

$$\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2 \geqslant 2\sqrt{ab},$$

czyli nierówność równoważna wyjściowej.

Zadanie 2. Udowodnić, że dla dowolnej liczby nieujemnej a zachodzi nierówność

$$1+a \geqslant 2\sqrt{a}.$$

Rozwiązanie

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną dla liczb 1 i a:

$$\frac{1+a}{2} \geqslant \sqrt{1\cdot a}.$$

Zadanie 3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b i c prawdziwa jest nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Rozwiązanie

Zapiszmy nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla par (a,b), (b,c) i (c,a):

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \qquad \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}, \qquad \frac{c+a}{2} \geqslant \sqrt{ca}.$$

Skoro każda z nierówności ma obie strony nieujemne, to możemy pomnożyć te nierówności stronami, otrzymując nierówność

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geqslant abc,$$

równoważną nierówności z treści zadania.

Zadanie 4. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi nierówność

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Rozwiązanie

Zapisujemy nierówność podstawową dla par liczb (a,b), (b,c), (c,a):

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab, \quad b^2+c^2 \geqslant 2bc, \quad c^2+a^2 \geqslant 2ac.$$

Po zsumowaniu stronami powyższych nierówności i podzieleniu przez 2, otrzymujemy tezę.

Zadanie 5. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b i c zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geqslant \sqrt{2}(a+b+c).$$

Rozwiązanie

Warto udowodnić najpierw nierówność

$$\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \frac{x+y}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

gdzie x, y są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Skoro lewa strona jest nieujemna, to wystarczy udowodnić nierówność $x^2+y^2 \geqslant \frac{(x+y)^2}{2}$ (dlaczego?), równoważną $\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$. Ta ostatnia nierówność wynika wprost z nierówności podstawowej.

Zapiszmy nierówność (3) dla par (a,b), (b,c), (c,a) i zsumujmy stronami uzyskane nierówności:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}+\frac{b+c}{\sqrt{2}}+\frac{c+a}{\sqrt{2}}.$$

Po pogrupowaniu wyrazów z prawej strony otrzymujemy nierówność z zadania.

Zadanie 6. Udowodnić, że jeśli p, q są liczbami dodatnimi o iloczynie równym 1, to

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\geqslant 4.$$

Rozwiązanie

Korzystając z podstawowej nierówności dla 1 i $1/\sqrt{p}$ oraz 1 i $1/\sqrt{q}$, otrzymujemy nierówności

$$1+\frac{1}{p}\geqslant\frac{2}{\sqrt{p}}\quad\text{oraz}\quad 1+\frac{1}{q}\geqslant\frac{2}{\sqrt{q}},$$

a zatem

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\geqslant\frac{4}{\sqrt{pq}}=4.$$

Zadanie 7. Udowodnić, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi, to zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2.$$

Rozwiązanie

Nierówność podstawowa dla liczb $\sqrt{a}/\sqrt{b}$ oraz $\sqrt{b}/\sqrt{a}$ ma postać

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=2.$$

Zadanie 8. Dowieść, że jeżeli $a>0$, $b>0$, $c>0$, to

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie

Dokonujemy podstawienia:

$$x=b+c,\quad y=c+a,\quad z=a+b.$$

Wówczas $x>0$, $y>0$, $z>0$,

$$a=\frac{y+z-x}{2},\quad b=\frac{z+x-y}{2},\quad c=\frac{x+y-z}{2}$$

i nierówność z zadania przybiera postać

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y+z-x}{x}+\frac{z+x-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right)\geqslant\frac{3}{2},$$

czyli, równoważnie,

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geqslant 6.$$

Aby dowieść prawdziwości tego oszacowania, wystarczy zauważyć, iż każde z trzech powyższych wyrażeń w nawiasach jest nie mniejsze niż 2 na mocy zadania 7. Dowód jest zakończony.

Uwaga. Analogicznie rozumując, można udowodnić następującą nierówność: dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Zadanie 9. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a+b+c\leqslant\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

Rozwiązanie

Mnożymy nierówność z tezy obustronnie przez abc, otrzymując

$$abc(a+b+c)\leqslant a^4+b^4+c^4. \tag{4}$$

Z podstawowej nierówności wynikają oszacowania:

$$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2},\quad bc\leqslant\frac{b^2+c^2}{2},\quad ca\leqslant\frac{c^2+a^2}{2}.$$

Wobec tego $a\cdot abc=(ab)(ca)\leqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2)(c^2+a^2)$ i analogicznie dla $b\cdot abc$ oraz $c\cdot abc$, łącznie

$$\begin{aligned}abc(a+b+c)\leqslant&\frac{1}{4}\big((a^2+b^2)(c^2+a^2)+\\&+(b^2+c^2)(a^2+b^2)+(c^2+a^2)(b^2+c^2)\big).\end{aligned} \tag{5}$$

Ponownie korzystając z podstawowej nierówności, otrzymujemy

$$a^2b^2\leqslant\frac{a^4+b^4}{2},\quad b^2c^2\leqslant\frac{b^4+c^4}{2},\quad c^2a^2\leqslant\frac{c^4+a^4}{2}.$$

Wobec tego $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\leqslant a^4+b^4+c^4$, a zatem

$$\frac{1}{4}\big((a^2+b^2)(c^2+a^2)+(b^2+c^2)(a^2+b^2)+(c^2+a^2)(b^2+c^2)\big)\leqslant a^4+b^4+c^4. \tag{6}$$

Nierówności (5) oraz (6) dają łącznie nierówność (4), równoważną tezie.

Zadanie 10. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geqslant 6abc.$$

Rozwiązanie

Podobnie jak wyżej, podstawowa nierówność implikuje:

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab,\quad\frac{b^2+c^2}{2}\geqslant bc,\quad\frac{c^2+a^2}{2}\geqslant ca.$$

Po przemnożeniu obustronnym przez $2c$, $2a$, $2b$ odpowiednio i zsumowaniu otrzymanych nierówności dostajemy tezę.

Zadanie 11. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_3^8}{8} + \ldots + \frac{x_n^{2^n}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Rozwiązanie

Korzystamy n razy z podstawowej nierówności, otrzymując kolejno:

$$\begin{aligned}
x_1 x_2 \ldots x_n = x_1 \cdot (x_2 x_3 \ldots x_n) &\leqslant \frac{x_1^2 + (x_2 x_3 \ldots x_n)^2}{2}, \\
(x_2 x_3 \ldots x_n)^2 = x_2^2 \cdot (x_3 x_4 \ldots x_n)^2 &\leqslant \frac{x_2^4 + (x_3 x_4 \ldots x_n)^4}{2}, \\
&\ldots \\
(x_{n-1} x_n)^{2^{n-2}} = x_{n-1}^{2^{n-2}} \cdot x_n^{2^{n-2}} &\leqslant \frac{x_{n-1}^{2^{n-1}} + x_n^{2^{n-1}}}{2}, \\
x_n^{2^{n-1}} = x_n^{2^{n-1}} \cdot 1 &\leqslant \frac{x_n^{2^n} + 1}{2}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
x_1 x_2 \ldots x_n &\leqslant \frac{x_1^2 + (x_2 x_3 \ldots x_n)^2}{2} \leqslant \\
&\leqslant \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4 + (x_3 x_4 \ldots x_n)^4}{4} \leqslant \\
&\leqslant \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_3^8 + (x_4 x_5 \ldots x_n)^8}{8} \leqslant \\
&\leqslant \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_3^8}{8} + \ldots + \frac{x_{n-1}^{2^{n-1}} + x_n^{2^{n-1}}}{2^{n-1}} \leqslant \\
&\leqslant \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_3^8}{8} + \ldots + \frac{x_{n-1}^{2^{n-1}}}{2^{n-1}} + \frac{x_n^{2^n}}{2^n} + \frac{1}{2^n},
\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Zadanie 12. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b).$$

Rozwiązanie

Kluczowym pomysłem w tym zadaniu jest wykonanie podstawienia

$$x = b + c - a, \quad y = c + a - b, \quad z = a + b - c.$$

Badana nierówność przybiera wówczas postać

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz. \tag{7}$$

Mamy $x+y=2c\geqslant 0$, $y+z=2a\geqslant 0$, $z+x=2b\geqslant 0$, skąd wynika, iż co najwyżej jedna spośród liczb x, y, z jest ujemna. Jeśli dokładnie jedna z tych liczb jest ujemna, to nierówność (7) zachodzi w sposób oczywisty. Jeśli natomiast wszystkie liczby x, y, z są nieujemne, to zachodzą oszacowania

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy},\quad y+z\geqslant 2\sqrt{yz},\quad z+x\geqslant 2\sqrt{zx}$$

i wystarczy je wymnożyć stronami.

Zadanie 13. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$6(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\leqslant 9(a^3+b^3+c^3)+(a+b+c)^3.$$

Rozwiązanie

Głównym pomysłem jest rozważenie podstawowej nierówności dla liczb $3a$ oraz $a+b+c$:

$$6a\cdot(a+b+c)\leqslant 9a^2+(a+b+c)^2.$$

Przemnażając obustronnie przez a, otrzymujemy

$$6a^2\cdot(a+b+c)\leqslant 9a^3+a(a+b+c)^2$$

i analogicznie

$$6b^2\cdot(a+b+c)\leqslant 9b^3+b(a+b+c)^2,\quad 6c^2\cdot(a+b+c)\leqslant 9c^3+c(a+b+c)^2.$$

Dodając do siebie trzy powyższe oszacowania, dostajemy nierówność z tezy.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 14.
Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2.$$

Zadanie 15.
Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}.$$

Zadanie 16.
Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b zachodzi nierówność

$$(a^4+1)(4b^4+1)\geqslant 8a^2b^2.$$

Zadanie 17.
Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b i c zachodzi nierówność

$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2.$$

Zadanie 18.
Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność
$$a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b.$$

Zadanie 19.
Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność
$$\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{b^4+a^2} \leqslant \frac{1}{ab}.$$

Zadanie 20.
Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b i c zachodzi nierówność
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c.$$

Zadanie 21.
Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność
$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{b+c+d} \geqslant \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

Zadanie 22.
Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

Zadanie 23.
Suma liczb dodatnich a, b, c jest równa 1. Udowodnić, że
$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leqslant 1.$$

Zadanie 24.
Udowodnić, że dla $a \neq b$ zachodzi nierówność
$$ab^3+a^3b < a^4+b^4.$$

Zadanie 25.
Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) \leqslant (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2.$$

Wskazówki i szkice rozwiązań

Zasada szufladkowa Dirichleta

10. Podzielmy dany odcinek na osiem odcinków o długości $12,5$ cm. W którymś z nich leżą co najmniej dwa z danych punktów.

11. Zamiast kuli rozważmy zawierający ją sześcian o krawędzi długości 2. Rozwiązanie można dokończyć, uogólniając rozumowanie z zadania 5.

12. Rozważmy dowolny *niewybrany* wierzchołek. Pozostałe wierzchołki są końcami pewnych ośmiu równoległych odcinków. Wybrano $10 = 8+2$ z tych wierzchołków.

13. (a) Wśród rozważanych 37 liczb znajdziemy siedem liczb o tej samej reszcie z dzielenia przez siedem.

(b) Uogólniając rozwiązanie z punktu (a), znajdujemy n liczb o tej samej reszcie z dzielenia przez n.

14. Uogólnijmy rozumowanie z zadania 4. Weźmy dowolny punkt; co najmniej sześć odcinków łączących go z pozostałymi punktami jest tego samego koloru. Następnie skorzystajmy z zadania 4 dla drugich końców tych odcinków.

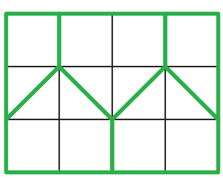
15. Podzielmy kwadrat na cztery mniejsze przystające kwadraciki, wtedy w pewnym z nich leżą co najmniej trzy z danych punktów. Wykażemy, że tworzą one trójkąt o polu co najwyżej $1/2$. Aby to udowodnić, zauważmy, że można kolejno przesunąć wierzchołki trójkąta wzdłuż przedłużeń jego boków tak, by znalazły się one na bokach kwadracika. Przy tej operacji pole trójkąta powiększa się. Następnie można przesunąć wierzchołki tak, by znalazły się one w wierzchołkach kwadracika, ponownie zwiększając pole trójkąta. Gdy punkty leżą w wierzchołkach kwadracika, trójkąt ma pole $1/2$. To dowodzi tezy i pokazuje, że ograniczenia $1/2$ nie da się poprawić.

16. Ustawmy dane liczby w ciąg $a_1, \ldots, a_{100}$ i rozważmy sumy

$$0,\ a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \ldots,\ a_1+a_2+\ldots+a_{100}.$$

17. Załóżmy, że istnieje pewien zbiór $\mathcal{A}$, złożony z sześciu liczb spełniających założenia, ale niespełniających tezy zadania. Niech $K \leqslant 9$ oznacza największą z tych sześciu liczb. Dla dowolnej liczby l, w zbiorze $\mathcal{A}$ nie występuje jednocześnie l i $K-l$. Stąd można pokazać, że zbiór $\mathcal{A}$ ma co najwyżej $K/2+1$ elementów.

18. Przeanalizujmy podział danego prostokąta na pięć wielokątów, jak na rysunku 26.



Rysunek 26

19. Wykażmy, że istnieje punkt A połączony z co najmniej czterema innymi punktami, a następnie, że pewne dwa spośród nich także są połączone.

20. W danym trójkącie rozważmy cztery punkty, z których każde dwa są odległe o co najmniej $1/\sqrt{3}$: wierzchołki trójkąta i jego środek.

Metoda niezmienników

8. Liczba kart leżących czarną stroną do góry nie zmienia parzystości w wyniku ruchu. Nie możemy więc z liczby parzystej 0 otrzymać w wyniku ruchów liczby nieparzystej 15.

9. Pokażemy, że nie da się uzyskać równej liczby monet obu rodzajów. W tym celu rozsądnie jest popatrzeć na różnicę liczby dukatów i talarów, które posiadamy. Na początku wynosi ona 1, zaś w trakcie wymiany zmniejsza się lub zwiększa o 11. Wobec tego różnica ta nigdy nie może być równa 0.

10. Nie. Parzystość sumy liczb zapisanych na tablicy nie zmienia się. Suma $1+2+\ldots+2012$ jest parzysta, w przeciwieństwie do liczby 33.

11. Ponumerujmy kolejne wierzchołki dziesięciokąta liczbami $1, 2, \ldots, 10$. Rozważmy liczbę N żetonów w wierzchołkach o numerach nieparzystych. W wyjściowej sytuacji wynosi ona 5. Podczas ruchu zmienia się o 2 lub pozostaje stała. Wobec tego N jest stale nieparzysta. Gdyby żetony można było zgromadzić w jednym wierzchołku, to liczba N byłaby równa 0 lub 10, w szczególności byłaby parzysta.

12. Nie da się tego zrobić. Zauważmy, że przy tradycyjnym pomalowaniu danej szachownicy jest inna liczba pól białych niż pól czarnych, zaś przestawienie pionka na pole sąsiadujące bokiem zmienia kolor pola, na którym on stoi.

13. Nie da się tego zrobić. Najprościej jest przyjąć, że w polu z „+” jest liczba $+1$, zaś w polu z „$-$” liczba -1 i rozważyć iloczyn wszystkich liczb na szachownicy.

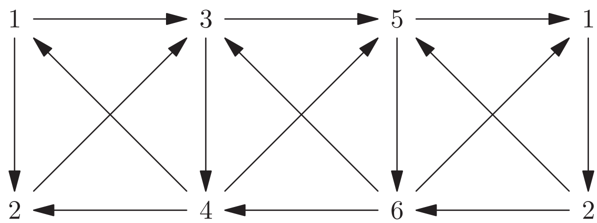
14. Nie da się tego zrobić. Podobnie jak we wskazówce do zadania 13, warto rozważyć pewien iloczyn. Tutaj jednak rozważmy iloczyn wszystkich liczb *w polach nie leżących na głównych przekątnych*. Kluczowe jest, że każda pozioma, pionowa lub skośna linia zawiera zero lub dwa pola z tego zbioru.

Turnieje i grafy

5. Mistrz zawsze istnieje i jest nim osoba, która wygrała najwięcej meczów. Rozumowanie pokazujące, że ta osoba wygrała bezpośrednio lub pośrednio z każdym innym jest podobne do rozwiązania zadania 2.

6. Załóżmy, że każdy jest mistrzem. Wykazać, że istnieje zawodnik a, który wygrał z dwoma innymi b, c. Pokazać, że a przegrał z czwartym zawodnikiem d i że d przegrał z b i c. Potem wystarczy wykazać, że niezależnie od wyniku meczu pomiędzy b i c, któryś z nich nie jest mistrzem.

7. Znaleźć wymagane turnieje dla 3 i dla 6 zawodników, a potem pokazać, że do każdego turnieju, w którym każdy jest mistrzem, można dokooptować dwóch zawodników tak, by ten warunek wciąż był spełniony (jeden z zawodników przegra ze wszystkimi poprzednimi; drugi wygra). Przykład turnieju dla 6 zawodników znajduje się na rys. 27 (zawodnicy 1 i 2 są wpisani dwukrotnie).



Rysunek 27

8. Najpierw wykażemy, że istnieje taki wierzchołek W, że po usunięciu z grafu W i wychodzących z niego krawędzi graf pozostanie spójny. Przykładowo wierzchołek W można wybrać następująco: wybieramy dowolny wierzchołek V i W jest najbardziej oddalonym od V wierzchołkiem grafu (*odległość pomiędzy wierzchołkami grafu* to minimalna liczba krawędzi na ścieżce je łączącej). Jeżeli jest kilka takich wierzchołków W, wybieramy dowolny z nich. Wtedy z każdego innego wierzchołka grafu istnieje ścieżka do V nie przechodząca przez W.

Usuwamy wierzchołek W wybrany powyżej i wszystkie wychodzące z niego krawędzie. Usuwamy wówczas jeden wierzchołek, n krawędzi i $n-1$ ścian (dlaczego?), więc wartość wyrażenia $w-k+s$ nie zmienia się. Ponadto graf po usunięciu W pozostaje spójny (i oczywiście planarny). Usuwając analogicznie kolejne wierzchołki dochodzimy do grafu złożonego z jednego wierzchołka i jednej, nieograniczonej, ściany.

9. Konstruujemy kolorowanie przez indukcję względem liczby wierzchołków grafu. Z zadania 4 wynika, że w grafie G istnieje wierzchołek W, z którego wychodzi co najwyżej 5 krawędzi. Usuwamy z G wierzchołek W i krawędzie o końcu w W, otrzymując graf G'. Ma on mniej wierzchołków niż G, więc na mocy założenia indukcyjnego istnieje kolorowanie dla G', czyli kolorowanie wszystkich wierzchołków G poza W. Wierzchołek W jest połączony z co najwyżej pięcioma wierzchołkami grafu G. Możemy więc pomalować go na kolor inny niż kolory jego sąsiadów. Tym samym otrzymujemy kolorowanie całego grafu G.

Liczby pierwsze i złożone

8. Skorzystaj ze wzoru $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

9. Rozłóż wyrażenie $pq-3p-q+3$ na czynniki.

10. Zauważ, że jedna z liczb p, q, r jest równa 5.

11. Sprawdź, dla których p jedna z liczb $4p^2+1$ lub $6p^2+1$ jest podzielna przez 5.

12. Sprawdź, kiedy liczba p^2+2 jest podzielna przez 3.

13. Skorzystaj ze wzoru $n^4+n^2+1=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$.

14. Skorzystaj ze wzoru $n^3+n^2+n-3=(n-1)(n^2+2n+3)$.

15. Udowodnij, że jedna z liczb $p+q$ i $p-q$ jest podzielna przez 4.

Kongruencje i ich własności

11. Mamy $2^4 \equiv -5 \pmod{21}$ oraz $5^4 \equiv -5 \pmod{21}$.

12. Mamy $3^2 \equiv 2 \pmod 7$ a więc $3^{2n+1} \equiv 3\cdot 2^n \pmod 7$.

13. Odpowiedź: $p=5$.

14. Warto zauważyć, że $2012 \equiv -1 \pmod{11}$. Wobec tego $2012^2 \equiv 1 \pmod{11}$, a zatem także $2012^{2012} = \left(2012^2\right)^{1006} \equiv 1 \pmod{11}$.

15. Postępować jak w zadaniu 4.

16. Mamy $5^5 \equiv 5^3 \pmod{1000}$.

17. Reszta z dzielenia przez 9 liczby n^4-1 zależy jedynie od reszty z dzielenia przez 9 liczby n. Wśród liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 są dokładnie dwie takie, że $9|n^4-1$; są to liczby 1 i 8.

Wśród liczb $1,2,\ldots,2007$ jest dokładnie $2\cdot 2007/9=446$ liczb dających resztę 1 lub 8 z dzielenia przez 9 i tyleż jest liczb n takich, że $9\big|n^4-1$.

18. Wystarczy pokazać, że dla n postaci $n=4k+3$ liczba z zadania jest podzielna przez 11 i większa niż 11. Zauważmy, że $7 \equiv -2^2 \pmod{11}$, więc $7\cdot 2^{2^n} \equiv -2^{2^n+2} \pmod{11}$. Najwygodniej zastosować małe twierdzenie Fermata, patrz zadanie 8.

19. Zauważyć, że $a^{10}+b^{10} \equiv a^{10}+(-a)^{10}=2a^{10} \pmod p$, więc $p\,|\,a^{10}$, gdyż $p\neq 2$.

20. Mamy $73 \equiv 3 \pmod{35}$ oraz $37 \equiv 2 \pmod{35}$.

21. Znaczki pogrupowane po 12 są już pogrupowane po 4. Frankowi zostaną więc trzy znaczki.

22. Gdyby taka liczba istniała, jaka byłaby jej reszta z dzielenia przez 3?

23. Jest 21 uczniów.

24. Korzystając z zadań 4 oraz 14 wiemy, że reszta z dzielenia 2012^{2012} przez 5 wynosi 1, tyle samo ile reszta z dzielenia przez 11. Wobec tego $5\,|\,2012^{2012}-1$ oraz $11\,|\,2012^{2012}-1$, więc $55\,|\,2012^{2012}-1$, gdyż liczby 5 i 11 są względnie pierwsze. Reszta z dzielenia 2012^{2012} przez 55 wynosi również 1.

Podobieństwo trójkątów

5. Szukana odległość to połowa długości wysokości opuszczonej z wierzchołka D w trójkącie prostokątnym ADC.

6. Niech D będzie środkiem boku BC, a E będzie środkiem boku AC trójkąta ABC. Chcemy pokazać, że odcinki AD i BE dzielą się w stosunku $1:2$.

Narysuj odcinek DE. Z twierdzenia Talesa wynika, że $AB = 2 \cdot DE$. Znajdź trójkąty podobne o bokach zawartych w środkowych.

7. Oznacz przez D punkt styczności okręgu do boku BC. Szukana długość odcinka to $AB \cdot CD/CB$. Aby obliczyć długość CD zauważ, że $BD = \frac{1}{2}AB$, gdyż obie strony równania to długości stycznych z punktu A do okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

8. Punkt A' symetryczny do A względem E leży na prostej BC.

9. Trójkąty AMX i CKX są podobne, analogicznie trójkąty AMY i CLY są podobne. Wynik to $AX : XY = 5 : 2$.

10. Oblicz pole s kwadratu w zależności od długości a podstawy AB oraz wysokości h opuszczonej z wierzchołka C, podobnie jak w zadaniu 4. Teza zadania sprowadza się do nierówności

$$s = \left(\frac{ah}{a+h}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}ah.$$

14. Skorzystaj z drugiej części zadania 12 dla obu okręgów.

15. Zastosuj drugą część zadania 12 i znajdź równanie opisujące szukaną długość.

16. Obie równości $ME \cdot MB = MC \cdot MF$ oraz $AF \cdot AB = AE \cdot AC$ są równoważne stwierdzeniu, że punkty B, C, E, F leżą na jednym okręgu.

W poszukiwaniu okręgów

9. Przeanalizować kąty w trójkącie ACP, pamiętając, że $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$.

10. Warto prześledzić zadanie 1. Szukany punkt jest, jak tam, środkiem pewnego łuku.

11. Rozwiązanie zadania zawarte jest w rozwiązaniu zadania 8.

12. Oznaczyć kąty czworokąta $ABCD$ przez α, β, γ, δ. Obliczyć, w zależności od α, β, γ, δ, miary kątów pomiędzy dwusieczną kąta AMD i prostą BM, prostymi BM i BN oraz prostą BN i dwusieczną kąta ANB.

13. Niech D i E będą spodkami wysokości poprowadzonych z punktów B i C odpowiednio. Można wykazać, że wówczas okręgi opisane na czworokątach $AEHD$ i $BCDE$ są przystające, gdyż kąty przystające DAE i DCE oparte są na łukach tych okręgów o wspólnej cięciwie DE. Pozostaje zauważyć, że AH i BC to średnice tych okręgów.

14. Rozważamy przypadek, gdy trójkąt ABC jest ostrokątny. Przypadki, gdy jest on prostokątny lub rozwartokątny pozostawiamy Czytelnikowi.

Niech H będzie punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC, zaś G – odbiciem symetrycznym H względem prostej zawierającej odcinek AB. Wówczas zachodzą równości $\sphericalangle GAB = \sphericalangle HAB = \sphericalangle HCB = \sphericalangle GCB$, stąd punkty G, A, C i B leżą na jednym okręgu.

15. Skorzystać z zadania 14, by pokazać, że okrąg opisany na trójkącie AHB jest symetryczny do okręgu opisanego na trójkącie ACB względem prostej AB; podobnie dla trójkątów BHC i CHA.

16. Wykażemy, że wysokości trójkąta KLM zawierają się w dwusiecznych trójkąta ABC. Niech S oznacza punkt przecięcia odcinków LM i AK. Miara kąta LSA to suma miar kątów SAM i SMA. Skoro suma łuków, na których oparte są te kąty, tworzy półokrąg, to $\sphericalangle SAM + \sphericalangle SMA = 90^\circ$, więc dwusieczna AK kąta CAB jest zarazem wysokością trójkąta KLM.

17. Na czworokącie $AMPC$ można opisać okrąg, więc zachodzą równości kątów $\sphericalangle PCM = \sphericalangle PAM = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Podobnie $\sphericalangle QCN = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$. Stąd

$$\sphericalangle MCN = 90^\circ - \sphericalangle PCM - \sphericalangle QCN = 90^\circ - \frac{1}{2}\left(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC\right) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

18. Z twierdzenia o kącie wpisanym i dopisanym wynika, że $\sphericalangle PAE = \sphericalangle PCA$. Z drugiej strony $ACQP$ jest trapezem wpisanym w okrąg, więc jest on trapezem równoramiennym i zachodzą równości kątów $\sphericalangle PCA = \sphericalangle QAC = \sphericalangle RAB$. Z tych równości i faktu, że $ABDE$ jest kwadratem, wynika $PE = RB$, czyli też $DP = DR$.

19. Załóżmy, że kąt ABC jest rozwarty (w przypadku, gdy kąt ten jest ostry lub prosty, rozwiązanie jest podobne). Oznaczmy przez F i G rzuty prostopadłe punktu D na proste AB i AE odpowiednio. Punkty A, D, G i F leżą w tej kolejności na jednym okręgu, więc $\sphericalangle GDF = \sphericalangle GAF$ oraz $\sphericalangle GFD = \sphericalangle GAD = \sphericalangle GEB$. Zatem, na mocy cechy podobieństwa kąt-kąt-kąt, trójkąty ABE i DGF są podobne. Zachodzi więc $\frac{AB}{AE} = \frac{DG}{DF}$, co jest równoważne tezie.

Nierówność trójkąta i jej zastosowania

3. Nie. Rozważ na przykład trójkąt o dwóch bardzo długich bokach i trzecim znacznie od nich krótszym.

4. Znajdź taki punkt T, że zachodzą równości $GT = CH$ oraz $AT = 2\cdot AS$. Rozważ trójkąt AGT.

5. Rozważ najdłuższą przekątną danego pięciokąta oraz te dwie spośród pozostałych przekątnych, które mają z nią wspólne końce. Sprawdź nierówność trójkąta.

6. Obróć trójkąt ABE o 90° wokół punktu E tak, aby obrazem punktu A był punkt D. Niech T będzie obrazem punktu B przy tym obrocie. Rozważ trójkąt ECT.

9. Niech $BC = 49$, $DA = 51$, a przez T oznaczmy punkt przecięcia przekątnych danego czworokąta. Rozważ trójkąty BCT oraz DAT.

10. Niech punkt D będzie środkiem tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, do którego należy punkt C. Wykaż, że $DM = \frac{\sqrt{3}}{6}AB$, a następnie rozważ trójkąt CMO, gdzie O to środek okręgu.

11. Niech punkty P_1 i P_2 będą końcami dowolnej średnicy danego koła. Dla każdego punktu A_i, trójka punktów P_1, P_2, A_i spełnia warunek $P_1A_i + P_2A_i \geqslant P_1P_2$. Dodaj te nierówności stronami.

13. Skorzystaj wielokrotnie ze zwykłej nierówności trójkąta. Zacznij od wykazania, że łamana $AC_1C_2C_3\dots C_nB$ jest dłuższa bądź równa łamanej $AC_2C_3\dots C_nB$.

14. Zauważ, że $310+200+150=660$.

15. Dwukrotnie odbij czworokąt symetrycznie, raz względem prostej AB, raz względem AD. Postępuj podobnie jak w rozwiązaniu zadania 12: poszukaj łamanej o długości $CD+DB+BC$ oraz odcinka o długości $2\cdot AC$, łączącego jej końce.

17. Poszukaj takiej siatki czworościanu, aby boki czworokąta opisanego w zadaniu utworzyły pewną łamaną.

18. Obróć ścianę $BCML$ wokół krawędzi BL tak, aby znalazła się w płaszczyźnie ściany $ABLK$, ale po przeciwnej stronie prostej BL. Jaki ma teraz kształt i jaką długość pierwsza z opisanych w zadaniu najkrótszych dróg?

19. Jest sześć różnych najkrótszych dróg. W celu ich wyznaczenia postępuj podobnie jak w zadaniu 18.

21. Uogólnij rozumowanie z zadania 20.

22. Wykorzystaj pomocnicze trójkąty prostokątne, jak w rozwiązaniu zadania 20. Ustaw je tak, aby ich przyprostokątne utworzyły łamaną o długości odpowiadającej wyrażeniu po lewej stronie nierówności.

23. Postępuj podobnie jak w zadaniu 22. Wykorzystaj fakt, że każda liczba dodatnia jest kwadratem pewnej liczby dodatniej, np. $a=(\sqrt{a})^2$.

Jak dowodzić nierówności

14. Nierówność ta jest równoważna nierówności podstawowej.

15. Pomnożyć nierówność stronami przez $ab(a+b)$.

16. Skorzystać z nierówności między średnią arytmetyczna a średnią geometryczną dla liczb a^4 i 1 oraz $4b^4$ i 1.

17. Zredukować wyrazy podobne z obu stron i skorzystać z nierówności podstawowej.

18. Ta nierówność wynika z zadania 4, w którym za c podstawiamy 1.

19. Udowodnić najpierw nierówność $\frac{a}{a^4+b^2}\leqslant\frac{1}{2ab}$.

20. Udowodnić nierówność $\frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{c}+c+\frac{c^2}{a}+a\geqslant 2a+2b+2c$.

21. Zastosować podstawienie $x=b+c+d$, $y=c+d+a$, $z=d+a+b$, $t=a+b+c$ i skorzystać z zadania 15.

22. Zapisać nierówność podstawową dla liczb ab i bc, bc i ca oraz ca i ab.

23. Dana nierówność jest równoważna nierówności

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)}\leqslant(a+b+c)^2.$$

24. Równość w oszacowaniu $ab \leqslant (a^2+b^2)/2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

25. Możemy rozważać tylko przypadek, gdy $a^2+b^2>c^2$, $c^2+a^2>b^2$, $b^2+c^2>a^2$ (dlaczego?). Warto poszukać prostszych do dowiedzenia nierówności, które implikują naszą. Przydatne jest spostrzeżenie, że nierówność z zadania jest (po podniesieniu do kwadratu) iloczynem trzech nierówności:

$$(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2) \leqslant (a+b-c)^2(c+a-b)^2,$$
$$(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2) \leqslant (b+c-a)^2(a+b-c)^2,$$
$$(c^2+a^2-b^2)(b^2+c^2-a^2) \leqslant (c+a-b)^2(b+c-a)^2.$$

Spis treści