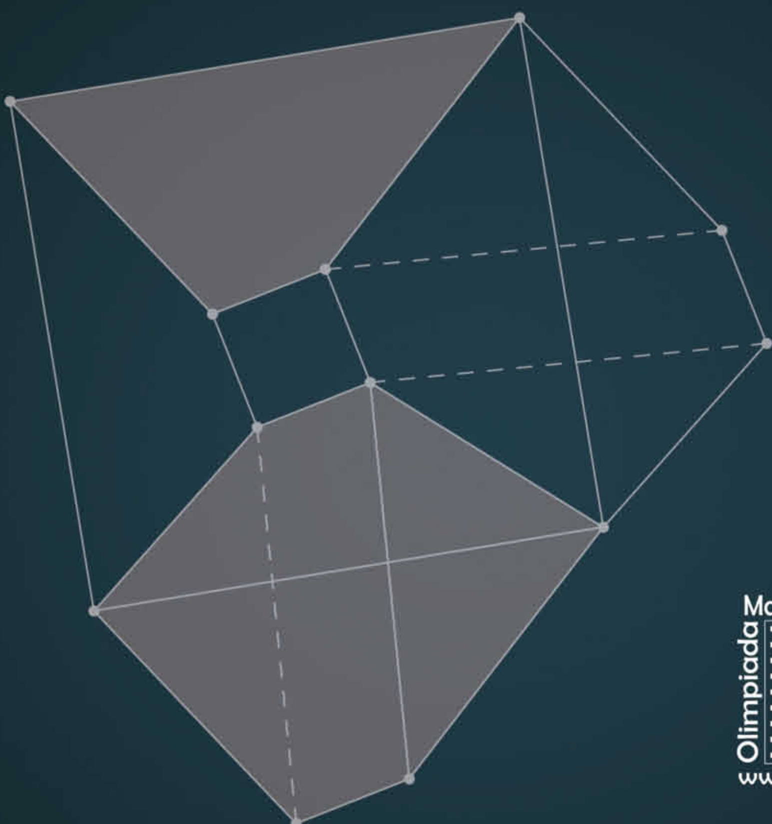
STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

MATEMATYCZNE SEMINARIUM OLIMPIJSKIE

2



Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Seminarium olimpijskie z matematyki

część druga

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

WARSZAWA 2014

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Praca zbiorowa pod redakcją Joachima Jelisiejewa

Recenzent: dr Joanna Jaszuńska

Skład komputerowy i rysunki: Joachim Jelisiejew

Projekt okładki: Adam Klemens

Seminarium olimpijskie z matematyki zorganizowano po raz pierwszy w roku szkolnym 2011/2012 pod nazwą *Poznajemy Olimpiadę Matematyczną Gimnazjalistów*. Działalność ta towarzyszyła organizacji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów w latach 2011–2014 i odbywała się w ramach projektu *Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym*, współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. Zajęcia były skierowane bezpośrednio do nauczycieli matematyki szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych i odbywały się regularnie w całej Polsce. Uczestnicy seminarium poznawali wyjątkowy charakter zadań olimpijskich oraz metodykę ich rozwiązywania, a także otrzymywali materiały dydaktyczne nawiązujące do tematyki zajęć.

Niniejsza broszura jest drugą z dwóch części opracowania, które powstało na bazie tych materiałów i zawiera bardziej zaawansowaną tematykę. Część pierwsza, publikowana w oddzielnym zeszycie, zawiera tematykę mniej zaawansowaną.

ISBN 978-83-63288-11-2

Nakład: 5000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Strategie wygrywające w grach

Urszula Pastwa i Joachim Jelisiejew

Strategia wygrywająca to sposób gry pozwalający, niezależnie od ruchów przeciwnika, wygrać rozgrywkę. Dowodząc, że dany gracz ma strategię wygrywającą, nigdy nie powinniśmy zakładać, że jego przeciwnik gra rozsądnie czy zgodnie z przewidywaniami. Strategia musi doprowadzić do zwycięstwa *niezależnie* od tego, jak gra przeciwnik.

Pozycją nazywamy stan gry w danym momencie rozgrywki. Kluczowe dla gier dwuosobowych są pojęcia *pozycji wygrywającej* i *pozycji przegrywającej*. Pozycja jest wygrywająca, jeżeli gracz rozpoczynający z niej może wygrać. Jest ona przegrywająca, jeżeli niezależnie od tego, jak rozpoczynający zagra, przegra, o ile jego przeciwnik gra optymalnie.

Z tych definicji wynika, że wykonanie ruchu z pozycji przegrywającej *zawsze* prowadzi do pozycji wygrywającej. Natomiast wykonanie *pewnego* „dobrego" ruchu z pozycji wygrywającej prowadzi do pozycji przegrywającej. Istotny jest tutaj fakt, że gracze wykonują ruchy na przemian, więc jeżeli *gracz* wykonuje ruch z pozycji *wygrywającej*, to zostawia *swojemu przeciwnikowi* pozycję *przegrywającą*.

Zauważmy, że o ile gra zawsze się kończy, to każda pozycja jest przegrywająca lub wygrywająca: zaczynając od pozycji końcowych, dla każdej pozycji kolejno sprawdzamy, czy da się z niej przejść do pozycji przegrywającej. Jeżeli tak, jest ona wygrywająca. Jeżeli nie, jest ona przegrywająca. Czytelnikowi pozostawiamy zastanowienie się, dlaczego w ten sposób sprawdzimy wszystkie pozycje. W szczególności pozycja startowa jest wygrywająca (i wtedy rozpoczynający gracz ma strategię wygrywającą) lub przegrywająca (wtedy drugi gracz ma strategię wygrywającą).

We wszystkich poniżej opisanych grach biorą udział dwaj gracze, Bolek i Lolek, wykonując ruchy na zmianę. Grę rozpoczyna Bolek. O ile nie jest napisane inaczej, nie ma remisów i przegrywa osoba, która nie może wykonać poprawnego ruchu. W każdym zadaniu należy rozstrzygnąć, czy gra zawsze się kończy. Dodatkowo, jeśli gra zawsze się kończy, trzeba znaleźć gracza, który posiada strategię wygrywającą (z dyskusji powyżej wynika, że taki gracz zawsze istnieje).

Zadanie 1. Mamy 100 zapałek. Ruch polega na zabraniu pewnej dodatniej liczby zapałek, jednak nie więcej niż 6.

Rozwiązanie

W każdym ruchu liczba zapałek zmniejsza się, więc wystarczy sprawdzić „kolejno", które liczby zapałek odpowiadają pozycjom przegrywającym, a które wygrywającym.

Najpierw rozważmy małe liczby zapałek. Z założenia, zero zapałek to pozycja przegrywająca. Jeżeli gracz zaczyna z jedną zapałką, to może ją zabrać, zostawiając przeciwnika z przegraną. Podobnie dla 2, 3, 4, 5, 6 zapałek. Jeżeli jednak gracz zaczyna mając 7 zapałek, to nie może zabrać wszystkich i niezależnie od tego ile zabierze, jego przeciwnik może wygrać, zabierając resztę. Wobec tego 7 zapałek jest pozycją przegrywającą. Mając osiem zapałek, gracz zabiera jedną i jego przeciwnik zostaje w pozycji przegrywającej. Tak więc $8=7+1$ zapałek jest wygrywającą pozycją. Podobnie $9=7+2,\ldots,13=7+6$ zapałek. Jeżeli gracz zaczyna z 14 zapałkami, musi zostawić swojemu przeciwnikowi 8 lub 9 lub 10 ... lub 13 zapałek, czyli pozycję wygrywającą. Wobec tego 14 zapałek to pozycja przegrywająca.

Ogólnie możemy sformułować hipotezę, że

n zapałek jest pozycją przegrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy 7 dzieli n.

Uzasadnienie tej obserwacji jest proste: z pozycji z n zapałkami, gdzie $7 \mid n$, gracz *zawsze* przechodzi do pozycji z n' zapałkami dla $7 \nmid n'$, natomiast z pozycji z n zapałkami, gdy $7 \nmid n$, gracz *może* przejść do pozycji z n' zapałkami, gdzie $7 \mid n'$.

Skoro $7 \nmid 100$, to 100 jest pozycją wygrywającą. Aby wygrać, zaczynający Bolek zabiera dwie zapałki, zostawiając Lolkowi $98 = 7 \cdot 14$ zapałek. Potem Bolek dba o to, by zawsze po jego ruchu Lolek znalazł się w pozycji przegrywającej, czyli by została liczba zapałek podzielna przez 7.

Zadanie 2. Mamy okrągły stolik. Gracze na zmianę kładą na nim monety jednozłotowe (ale tak, aby się nie nakładały oraz nie wychodziły poza krawędź stolika).

Rozwiązanie

Na stole zmieści się tylko skończenie wiele monet, więc gra zakończy się.

Wygrywa Bolek. W pierwszym ruchu kładzie on monetę dokładnie na środku stołu. Potem, po każdym ruchu Lolka kładzie monetę *symetrycznie względem środka stołu* do monety położonej przez Lolka. Dzięki temu układ zachowuje symetrię i jeżeli Lolek zdołał położyć monetę, to i Bolek położy swoją symetrycznie.

Pytanie dodatkowe: który z graczy wygrałby, gdyby okrągły stolik miał dokładnie na środku okrągłą dziurę?

Zadanie 3. Na stole leży 9 żetonów z numerami od 1 do 9. Ruch polega na usunięciu ze stołu żetonu z wybraną liczbą oraz wszystkich żetonów z dzielnikami tej liczby.

Rozwiązanie

Skoro w każdym ruchu usuwamy co najmniej jeden żeton, to gra zakończy się (po co najwyżej 9 ruchach).

Pokażemy, że Bolek może wygrać, ale zrobimy to *nie wskazując konkretnego pierwszego ruchu, prowadzącego do zwycięstwa.* Kluczowe jest, że żeton z numerem jeden zawsze będzie usunięty w pierwszym ruchu. Rozważmy dwa przypadki:

1. Pozycja, w której na stole są żetony $2,3,4,5,6,7,8,9$ jest przegrywająca. W tej sytuacji Bolek usuwa żeton 1, zostawiając Lolkowi pozycję przegrywającą.
2. Pozycja, w której na stole są żetony $2,3,4,5,6,7,8,9$ jest wygrywająca. Załóżmy, że zwycięskim ruchem jest usunięcie żetonu z liczbą n. Znaczy to, że po usunięciu tego żetonu (oraz żetonów z dzielnikami n) mamy pozycję przegrywającą. Wtedy Bolek w pierwszym swoim ruchu usuwa żetony z liczbą n oraz jej dzielnikami (wśród nich 1), zostawiając Lolkowi pozycję przegrywającą.

W ramach ciekawostki: pierwszym ruchem w wygrywającej strategii jest zabranie żetonu z liczbą 2*. Ale uzasadnienie tego jest już znacznie trudniejsze.*

Zadanie 4. Na stole leży 9 żetonów z numerami od 1 do 9. Ruch polega na wzięciu dowolnego żetonu. Wygrywa osoba, która jako pierwsza ma trzy żetony o sumie liczb 15.

Uwaga: możliwe jest, że gra zakończy się remisem (tzn. żaden z graczy nie zbierze żetonów o sumie liczb 15*). Wobec tego możliwe, że żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej. Trzeba uwzględnić to w rozumowaniu i odpowiedzi.*

Rozwiązanie

Oczywiście gra zakończy się po co najwyżej 9 ruchach.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Rysunek 1

Wykażemy, że przy optymalnej strategii pojedynek zakończy się remisem, tzn. żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej. Dobrym pomysłem jest zinterpretowanie stwierdzenia „trzy żetony o sumie liczb 15". Ułóżmy liczby $1,\ldots,9$ w kwadrat magiczny 3×3, jak na rysunku 1.

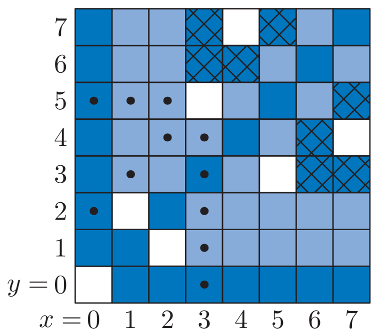
Wtedy 15 to suma liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na każdej przekątnej. Co więcej, są to jedyne trójki liczb sumujące się do 15. Zadanie redukuje się do pokazania, że każdy z graczy może wywalczyć przynajmniej remis w grze w „kółko i krzyżyk". Pozostawiamy ten problem Czytelnikowi.

Zadanie 5. Mamy 7 kulek białych i 5 kulek czarnych. W jednym ruchu dozwolone jest zabranie dowolnej (dodatniej) liczby kulek jednego koloru albo zabranie takiej samej (dodatniej) liczby kulek obu kolorów.

Rozwiązanie

Skoro w każdym ruchu kulek ubywa, to gra zakończy się.

Dla uproszczenia przez (x,y) oznaczamy pozycję, w której mamy x kulek białych i y kulek czarnych. Oczywiście po wykonaniu ruchu liczba białych czy czarnych kulek nie zwiększy się, więc powinniśmy przeanalizować, które pozycje są przegrywające, a które wygrywające, rozpoczynając od $(0,0)$. Pozycja $(0,0)$ jest przegrywająca, więc pozycje $(n,0),(0,n),(n,n)$ są wygrywające dla dowolnego n.



Rysunek 2

Dalej najprościej rozwiązać to zadanie metodą „graficzną", patrz rysunek 2, na którym kolorowe tło mają pozycje wygrywające.

Z pozycji $(1,2),(2,1)$ da się przejść tylko do wygrywających pozycji, więc $(1,2)$ i $(2,1)$ są przegrywające. Wobec tego każda z pozycji $(n,1)$, $(n,2)$, $(1,n)$, $(2,n)$ jest wygrywająca dla każdego $n \geqslant 3$ i wygrywające są też pozycje $(n,n+1),(n+1,n)$ dla $n \geqslant 2$. Stąd wynika, że $(5,3),(3,5)$ są przegrywające (na rysunku 2 kropkami zaznaczono pozycje, do których można przejść z $(3,5)$; wszystkie one są wygrywające). Ostatecznie $(7,5)$, czyli pozycja startowa Bolka, jest wygrywająca. Zwycięskimi ruchami są przejścia do pozycji $(3,5)$, $(5,3)$ lub $(7,4)$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 6.

Mamy 100 zapałek. W jednym ruchu można wziąć 1, 2 lub 3 zapałki.

Zadanie 7.

Mamy 100 zapałek. W jednym ruchu zabieramy 4, 5 lub 6 zapałek.

Zadanie 8.

Mamy 100 zapałek. W jednym ruchu można wziąć 1, 2 lub 3 zapałki. Przegrywa osoba, która weźmie ostatnią zapałkę.

Zadanie 9.

Mamy daną szachownicę 8×8. Król stoi na polu $A1$. W każdym ruchu można przesunąć króla o jedno pole do góry, w prawo lub po przekątnej w prawo i do góry. Wygrywa ten gracz, który postawi króla na polu $H8$.

Zadanie 10.

Plansza do gry składa się z 15 ustawionych w rzędzie kwadratów. Bolek kładzie swój pionek na skrajnym lewym, a Lolek na skrajnym prawym kwadracie. Ruch polega na przesunięciu swojego pionka na sąsiedni wolny kwadrat (w prawo lub w lewo), przy czym oba pionki nie mogą znaleźć się na tym samym polu.

Liczby pierwsze, liczby wymierne i niewymierne

Jarosław Wróblewski

Uwaga terminologiczna: Będziemy przyjmować, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie.

Bez wdawania się w niepotrzebne formalizmy można powiedzieć, że twierdzenie o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze orzeka, iż każda liczba naturalna większa od 1 rozkłada się w sposób jednoznaczny na iloczyn liczb pierwszych lub, jak kto woli, na iloczyn potęg różnych liczb pierwszych. Zdrowy rozsądek powie nam bezbłędnie, które rozkłady są istotnie różne, a między którymi różnica polega tylko na sposobie ich zapisu.

W zapisie iloczynowym liczby pierwsze stają się nierozbijalnymi atomami, z których zbudowane są liczby naturalne. Oswoiwszy się z jednoznacznością rozkładu na czynniki pierwsze, możemy mieć pewną trudność w docenieniu jej konsekwencji. Jak wyglądałby świat liczb bez jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze? No cóż, aby to zobaczyć, trzeba wybrać się w podróż do świata, w którym tej jednoznaczności nie ma.

Najpierw jednak zdajmy sobie sprawę, że dzięki jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze, niektóre zadania tylko z pozoru dotyczą liczb, a w praktyce sprowadzają się do czystej kombinatoryki, którą od liczb można byłoby zupełnie oderwać.

Oto przykłady zadań o liczbach i ich kombinatorycznych odpowiedników.

Zadanie 1a. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnych liczb naturalnych p, q, r, jeżeli iloczyn pqr jest podzielny przez 5^k, to co najmniej jeden z czynników p, q, r jest podzielny przez 5^3.

Zadanie 1b. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Jeżeli w trzech koszykach z owocami znajduje się łącznie co najmniej k jabłek, to w co najmniej jednym koszyku znajdują się co najmniej 3 jabłka.

Zadanie 2a. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnych liczb naturalnych p, q, r, jeżeli iloczyn pqr jest podzielny przez 6^k, to co najmniej jeden z czynników p, q, r jest podzielny przez 6^3.

Zadanie 2b. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne k, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Jeżeli w trzech koszykach z owocami znajduje się łącznie co najmniej k jabłek i co najmniej k gruszek, to w co najmniej jednym koszyku znajdują się co najmniej 3 jabłka i co najmniej 3 gruszki.

Zadanie 3a. O liczbie naturalnej n wiadomo, że liczba n^5 jest podzielna przez 3^{11}. Dla jakiej największej liczby naturalnej k możemy stąd wywnioskować, że liczba n^5 jest podzielna przez 3^k?

Zadanie 3b. Basia potrzebuje 11 jabłek. Jabłka są sprzedawane tylko w opakowaniach po 5 sztuk. Ile co najmniej jabłek musi kupić Basia?

Podróż do świata bez jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze

Wyobraźmy sobie świat liczb, który składa się tylko z liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. W takim świecie nie da się wprawdzie wykonywać dodawania, jednak mnożenie liczb wykonujemy bez problemu. A to w zupełności wystarczy, aby mówić o podzielności liczb, zdefiniować liczby pierwsze jako liczby większe od 1 i nierozkładalne na iloczyn mniejszych liczb oraz udowodnić twierdzenie o istnieniu rozkładu dowolnej liczby większej od 1 na iloczyn liczb pierwszych. W takim świecie liczbami pierwszymi są 4, 7, 10, 13, ale 16 jest liczbą złożoną, gdyż $16=4\cdot 4$. W tym świecie nie ma jednak jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze, gdyż np. liczba 100 ma dwa istotnie różne rozkłady: $100=10\cdot 10=4\cdot 25$.

My, którzy znamy także inne liczby niż tylko tam występujące, możemy patrzeć na ten świat z pozycji Boga, który dostrzega, nazwijmy to, kwarki 2 i 5 stanowiące budulec liczb 4, 10, 25, ale nie mogące istnieć w tym świecie samodzielnie, przeto niedostrzegalne dla jego mieszkańców. Dla tych mieszkańców równość $10\cdot 10=4\cdot 25$ ma wymowę taką, jakbyśmy włożyli do koszyka dwa jabłka, potrząsnęli nim trochę i stwierdzili, że znajduje się w nim gruszka i pomidor.

Prześledźmy, jakie druzgocące konsekwencje dla znanych nam prawideł miałoby znalezienie się w tym świecie.

- Jeżeli p jest liczbą pierwszą oraz iloczyn mn jest podzielny przez p, to co najmniej jeden czynnik m, n jest podzielny przez p.
  Kontrprzykład: $p=4$, $m=n=10$.
  My dostrzegamy, że liczba $p=4$ rozkłada się na iloczyn $2\cdot 2$, ponieważ jednak czynnik 2 nie może istnieć samodzielnie w tym świecie, jest niedostrzegalny — dopiero spotykając się w iloczynie mn z drugim takim czynnikiem manifestuje swoją obecność.
- Liczba naturalna d jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona dzielnikiem ich największego wspólnego dzielnika $\mathrm{NWD}(m, n)$.

Kontrprzykład: $m=40$, $n=100$, ich wspólne dzielniki to: 1, 4, 10.
Zatem $\text{NWD}(m,n)=10$, co nie jest podzielne przez 4.
My dostrzegamy, że prawdziwy największy wspólny dzielnik 40 i 100 to $20=2\cdot 2\cdot 5$, jednak w tym świecie nie jest dostrzegalny ani pojedynczy czynnik 2 lub 5, ani też iloczyn nieparzystej liczby takich czynników. To powoduje, że największy wspólny dzielnik równy 10 podaje zafałszowany obraz wspólnej części struktury iloczynowej liczb 40 i 100.

- $(\text{NWD}(m,n))^2=\text{NWD}\left(m^2,n^2\right)$
  Kontrprzykład: Dla $m=4$, $n=10$ mamy
  $$\text{NWD}(4,10)=1, \text{ ale } \text{NWD}(16,100)=4.$$
  My dostrzegamy, że liczby 4 i 10 mają wspólny czynnik 2, jednak w tym świecie staje się on dostrzegalny dopiero po połączeniu z drugim takim czynnikiem.
- $\text{NWD}(a,b,c)=\text{NWD}(\text{NWD}(a,b),c)$
  Kontrprzykład: Dla $a=40$, $b=100$, $c=4$ mamy
  $$\text{NWD}(a,b,c)=\text{NWD}(40,100,4)=4.$$
  Jednak $\text{NWD}(a,b)=\text{NWD}(40,100)=10$ i $\text{NWD}(10,4)=1$.
  Już wcześniej widzieliśmy, że w tym świecie NWD daje zafałszowaną informację o wspólnych elementach struktury iloczynowej liczb. Nic więc dziwnego, że nagromadzenie tych zafałszowań prowadzi do losowych wyników.

Przykłady zadań z rozwiązaniami

Powracamy do „normalnego” świata — wszędzie poniżej NWD oznacza standardowy największy wspólny dzielnik liczb całkowitych.

Zadanie 4. Obliczyć $\text{NWD}(24!,24^8)$.

Rozwiązanie

Rozkładamy na czynniki pierwsze liczbę 24^8:
$$24^8=2^{24}\cdot 3^8\,.$$

Jeśli chodzi o rozkład liczby 24!, to interesują nas tylko wykładniki, z jakimi do tego rozkładu wchodzą czynniki pierwsze 2 i 3.

W iloczynie $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 24$ występuje 12 liczb parzystych, 6 liczb podzielnych przez 4, 3 liczby podzielne przez 8 i jedna liczba podzielna przez 16. Zatem czynnik 2 pojawia się $12+6+3+1=22$ razy. Należy przy tym zwrócić uwagę, że na przykład liczby podzielne przez 4 są w tej sumie uwzględnione dwukrotnie: raz wśród 12 liczb parzystych i raz wśród 6 liczb podzielnych przez 4.

Podobnie, czynnik 3 występuje w rozkładzie liczby 24! z wykładnikiem $8+2=10$. Zatem

$$24! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot (\text{czynniki, które nas nie interesują}),$$

stąd

$$\mathrm{NWD}(24!,\, 24^8) = 2^{\min(22,24)} \cdot 3^{\min(10,8)} = 2^{22} \cdot 3^8.$$

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 jest pierwsza.

Rozwiązanie

Dla $p=3$ otrzymujemy liczbę pierwszą $p^2+2=11$.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą różną od 3, to liczba p jest niepodzielna przez 3, skąd liczba p^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. W konsekwencji liczba p^2+2 jest podzielna przez 3, a ponieważ jest większa od 3, nie może być pierwsza.

Odpowiedź: $p=3$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

Zadanie 6. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n\ ?$$

Rozwiązanie

Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu liczb, otrzymujemy

$$2^m \cdot 3^m = 2^{2n} \cdot 3^n\,,$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach:

$$m = 2n \quad \text{oraz} \quad m = n\,.$$

Powyższy układ równań ma tylko jedno rozwiązanie w liczbach rzeczywistych: $m=n=0$, nie ma więc rozwiązań w liczbach naturalnych.

Odpowiedź: Nie istnieją liczby naturalne m, n spełniające dane równanie.

Zadanie 7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 24, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

Rozwiązanie

Dla $m=4$, $n=6$ iloczyn $mn=24$ jest podzielny przez 24, a jedynymi dzielnikami co najmniej jednej z liczb 4, 6 są liczby 1, 2, 3, 4 oraz 6. Z kolei dla $m=3$, $n=8$ iloczyn $mn=24$ jest podzielny przez 24, a jedynymi dzielnikami co najmniej jednej z liczb 3, 8 są liczby 1, 2, 3, 4 oraz 8.

Zatem jedynymi kandydatami na liczby d spełniające warunki zadania są 1, 2, 3 i 4. Liczba $d=1$ spełnia warunki zadania w oczywisty sposób.

Jeżeli liczba mn jest podzielna przez 24, to jest podzielna przez 2, a ponieważ 2 jest liczbą pierwszą, co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez 2. Stąd $d=2$ spełnia warunki zadania. W analogiczny sposób stwierdzamy, że warunki zadania są spełnione przez $d=3$.

Liczba $d=4$ jest złożona i wymaga nieco innego podejścia. Jeżeli liczba mn jest podzielna przez 24, a więc w konsekwencji przez 8, to czynnik 2 wchodzi do rozkładu liczby mn na czynniki pierwsze z wykładnikiem równym co najmniej 3.

Jeżeli

$$m=2^a\cdot(\text{iloczyn potęg nieparzystych liczb pierwszych})\,,$$

$$n=2^b\cdot(\text{iloczyn potęg nieparzystych liczb pierwszych})\,,$$

to

$$mn=2^{a+b}\cdot(\text{iloczyn potęg nieparzystych liczb pierwszych})\,,$$

a przy tym, jak ustaliliśmy, $a+b\geqslant 3$. Stąd $a\geqslant 2$ lub $b\geqslant 2$, a w konsekwencji odpowiednio m lub n jest podzielne przez 4.

Odpowiedź: Liczbami spełniającymi warunki zadania są 1, 2, 3 i 4.

Zadanie 8. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu *względnie pierwszych* liczb naturalnych. Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n},$$

$$2=\frac{m^2}{n^2},$$

$$2n^2=m^2\,.$$

Stąd wynika, że liczba m^2 jest parzysta, a co za tym idzie, liczba m jest parzysta. Podstawiając $m=2k$ otrzymujemy:

$$2n^2=(2k)^2,$$

$$n^2=2k^2\,,$$

co z kolei prowadzi do wniosku, że liczba n jest parzysta.

Zatem obie liczby m, n są parzyste, co stoi w sprzeczności z założeniem, że liczby te są względnie pierwsze. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Zwróćmy uwagę, że w tym dowodzie nie wykorzystywaliśmy twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze, a jedynie skorzystaliśmy z faktu, że liczba naturalna i jej kwadrat mają tę samą parzystość.

Zadanie 9. Dowieść, że liczba $\log_{40} 50$ jest niewymierna.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zauważmy, że $\log_{40} 50$ jest liczbą dodatnią. Załóżmy, że liczba ta jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych. Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$\log_{40} 50 = \frac{m}{n}, \quad 40^{m/n} = 50, \quad 40^m = 50^n .$$

Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu stron równości otrzymujemy

$$2^{3m} \cdot 5^m = 2^n \cdot 5^{2n} ,$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach:

$$3m = n \quad \text{oraz} \quad m = 2n .$$

Powyższy układ równań ma tylko jedno rozwiązanie w liczbach rzeczywistych: $m = n = 0$, nie ma więc rozwiązań w liczbach naturalnych.

Udowodniliśmy więc, że liczba $\log_{40} 50$ nie jest liczbą wymierną.

Zadanie 10. Liczby $a+b$, $b+c$ oraz $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

Rozwiązanie

Tak, mamy bowiem

$$a = \frac{(a+b)+(c+a)-(b+c)}{2}$$

i podobnie dla liczb b, c.

Zadanie 11. Liczby $a+b$, $b+c$ oraz $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

Rozwiązanie

Nie, np. dla liczb $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = -2\sqrt{2}$ obliczamy, że $a+b = 2\sqrt{2}$, $b+c = -\sqrt{2}$, $c+a = -\sqrt{2}$ oraz $a+b+c = 0$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 12.

Wskazać takie liczby naturalne m, n, że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^{13} .$$

Zadanie 13.

Która liczba jest większa: $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19} ?

Zadanie 14.

Obliczyć $\mathrm{NWW}(12^{12}, 18^{18})$.

Zadanie 15.

Niech $a=2^4\cdot 3^7\cdot 5^9$, $b=2^6\cdot 3^{11}\cdot 5^5$, $c=2^{10}\cdot 3^3\cdot 7^2$. Obliczyć $\mathrm{NWD}(a,b,c)$ oraz $\mathrm{NWW}(a,b,c)$.

Zadanie 16.

Niech $a=2^4\cdot 3^7\cdot 6^9$, $b=2^6\cdot 3^{11}\cdot 4^5$, $c=2^{10}\cdot 3^3\cdot 10^2$. Obliczyć $\mathrm{NWD}(a,b,c)$ oraz $\mathrm{NWW}(a,b,c)$.

Zadanie 17.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n>1$, dla których liczba n^2-1 jest pierwsza.

Zadanie 18.

Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $3p+1$ jest pierwsza.

Zadanie 19.

Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m\cdot 12^n=18^k\,?$$

Zadanie 20.

Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m\cdot 24^n=12^k\,?$$

Zadanie 21.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności:

Dla dowolnych liczb naturalnych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

Zadanie 22.

Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Zadanie 23.

Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ oraz $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

Zadanie 24.

Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$ oraz $e+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d, e są wymierne?

Ekstremalny element, czyli o tym, co naj...

Adam Osękowski i Łukasz Rajkowski

Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie pewnego podejścia do zadań kombinatorycznych. Z grubsza, metoda polega na wyróżnieniu ekstremalnego elementu i wykorzystaniu jego własności. Zilustrujemy to na kilku przykładach.

Zadanie 1. W pewnej grupie 30 osób każda zna co najmniej 25 osób spośród pozostałych. Udowodnić, że można wybrać spośród nich takie sześć osób, z których każde dwie się znają.

Rozwiązanie

Niech m będzie największą liczbą o tej własności, że można wybrać osoby A_1, A_2, ..., A_m, z których każde dwie się znają. Oznaczmy odpowiednio przez $N_1, N_2, \ldots, N_m$ zbiory nieznajomych dla $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Zgodnie z warunkami zadania, każda z osób A_i nie zna co najwyżej 4 osób, co pociąga za sobą, iż zbiór $N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_m$ ma co najwyżej $4m$ elementów. Z drugiej strony, zbiór ten musi mieć co najmniej $30-m$ elementów: w przeciwnym razie spośród niewybranych $30-m$ osób moglibyśmy wybrać osobę znaną przez wszystkie osoby A_1, A_2, ..., A_m, co przeczyłoby maksymalności m. Otrzymaliśmy zatem $4m \geqslant 30-m$, czyli $m \geqslant 6$. Jest to równoważne tezie zadania.

Uwaga: Warto tu zauważyć, że liczby 6 nie można zwiększyć. Istotnie, rozważmy następujący przykład: oznaczmy osoby przez $A_1, A_2, \ldots, A_{30}$ i przyjmijmy, że A_i zna A_j wtedy i tylko wtedy, gdy i, j dają różne reszty z dzielenia przez 6. Dla każdej liczby i, w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 30\}$ jest dokładnie pięć liczb o takiej samej reszcie z dzielenia przez 6 jak i, a zatem każda osoba nie zna dokładnie czterech spośród pozostałych i założenia zadania są spełnione. Nie można jednak wybrać siedmiu osób, z których każde dwie się znają: wśród dowolnych siedmiu liczb istnieją dwie, które dają tę samą resztę z dzielenia przez 6.

Zadanie 2. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział n zawodników ($n \geqslant 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykazać, że istnieją tacy trzej zawodnicy A, B, C, że A wygrał z B, B wygrał z C, zaś C wygrał z A.

Rozwiązanie

Wybierzmy zawodnika, który wygrał największą liczbę meczów i nazwijmy go A (jeśli jest kilku takich zawodników, wybieramy dowolnego spośród nich). Pozostałych $n-1$ zawodników możemy podzielić na dwa zbiory: P — tych, którzy przegrali z A oraz W — tych, którzy wygrali z A. Zauważmy, iż każdy ze zbiorów P, W jest niepusty, na mocy warunków zadania. Rozważmy teraz dowolnego zawodnika C ze zbioru W. Gdyby C wygrał ze wszystkimi ze zbioru P, to — zważywszy, że wygrał także z A — miałby on więcej zwycięstw niż A, co przeczy wyborowi A. Zatem istnieje zawodnik B ze zbioru P, który wygrał z C. Trójka A, B, C posiada żądane własności.

Uwaga: Można także podać analogiczne rozwiązanie, w którym jako A bierzemy zawodnika, który *przegrał* największą liczbę meczów.

Zadanie 3. Na turnieju rycerskim każdy uczestnik posiada wśród pozostałych co najwyżej trzech śmiertelnych wrogów. Udowodnić, że można podzielić uczestników turnieju na dwie grupy tak, by dowolny uczestnik posiadał w swojej grupie co najwyżej jednego śmiertelnego wroga.

Uwaga: Jeżeli rycerz A jest śmiertelnym wrogiem rycerza B, to rycerz B jest śmiertelnym wrogiem rycerza A.

Rozwiązanie

Dla każdego podziału rycerzy na grupy rozpatrzmy liczbę *konfliktów*, tzn. liczbę par śmiertelnych wrogów, którzy znaleźli się w tej samej grupie. Rozważmy teraz podział na grupy, który stwarza najmniejszą możliwą liczbę konfliktów. Udowodnimy, że spełnia on żądane warunki. Przypuśćmy, że przy tym podziale znalazł się uczestnik, mający więcej niż jednego wroga w swojej grupie. Wówczas na mocy treści zadania posiada on co najwyżej jednego wroga w grupie przeciwnej. Przenosząc go do tej grupy, zmniejszymy liczbę konfliktów. Jest to sprzeczne z założeniem, że wybrany z początku podział stwarza najmniejszą możliwą ich liczbę.

Zadanie 4. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnić, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.

Rozwiązanie

Niech m będzie maksymalną liczbą rozłącznych par znajomych wybranych spośród uczestników konferencji.

Oznaczmy uczestników przez $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}, B_1, B_2, \ldots, B_{2n-2m}$ w taki sposób, że dla $k \leqslant m$ osoby A_{2k-1} oraz A_{2k} się znają; możemy to zapisać w sugestywnej postaci:

$$(A_1, A_2), (A_3, A_4), (A_5, A_6), \ldots, (A_{2m-1}, A_{2m}), B_1, B_2, \ldots, B_{2n-2m}.$$

Załóżmy teraz, że $m < n$ i weźmy pod uwagę uczestników B_1 i B_2. Osoby te nie znają się, gdyż przeczyłoby to maksymalności liczby m. Analogicznie, żadna z tych osób nie zna nikogo spośród $B_3, B_4, \ldots, B_{2n-2m}$, skąd wnioskujemy, iż zarówno B_1, jak i B_2 mają co najmniej n znajomych w zbiorze $\{A_1, A_2, \ldots, A_{2m}\}$.

Spójrzmy teraz na parę (A_1, A_2). Jeśli B_1 zna A_1, to B_2 nie może znać A_2: w przeciwnym razie moglibyśmy zakwaterować A_1 z B_1 oraz A_2 z B_2, uzyskując łącznie $m+1$ par znajomych, co byłoby sprzeczne z definicją liczby m. Analogicznie, jeśli B_1 zna A_2, to B_2 nie może znać A_1. Wynika stąd, iż suma liczb znajomych uczestników B_1 i B_2 w zbiorze $\{A_1, A_2\}$ nie przekracza 2.

Rozumowanie to powtarzamy dla par $(A_3, A_4), (A_5, A_6), \ldots, (A_{2m-1}, A_{2m})$, stwierdzając ostatecznie, iż suma liczb znajomych uczestników B_1 i B_2 w zbiorze $\{A_1, A_2, \ldots, A_{2m}\}$ nie przekracza $2m$. Z drugiej strony, wykazaliśmy wyżej, iż liczba ta wynosi co najmniej $2n$. Przeczy to założeniu $m<n$ przyjętemu na wstępie; wobec tego mamy $m=n$ i teza zadania jest prawdziwa.

Zadanie 5. Na przyjęciu spotkało się n osób ($n \geqslant 5$). Wiadomo, że wśród dowolnych trzech osób pewne dwie znają się. Dowieść, że spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

Rozwiązanie

Niech m będzie największą liczbą naturalną o następującej własności: można wybrać takie osoby $A_1, A_2, \ldots, A_m$, że A_i oraz A_{i+1} znają się dla $i=1,2,\ldots,m-1$. Niech S oznacza zbiór pozostałych $n-m$ osób.

Rozważmy trzy przypadki:

1. $m \leqslant n/2$. Zbiór S ma co najmniej $n/2$ elementów oraz A_m nie zna żadnej osoby z tego zbioru, co na mocy warunków zadania oznacza, iż każde dwie osoby w tym zbiorze muszą się znać. Jeśli osoby te usiądą dowolnie przy okrągłym stole, to każda z nich będzie siedzieć obok dwóch swoich znajomych.
2. $n/2 < m \leqslant n-1$. Zbiór S jest niepusty i żadna osoba z tego zbioru nie zna ani A_1, ani A_m, na mocy maksymalności liczby m. Wynika stąd, że osoby A_1 i A_m się znają, a zatem $A_1, A_2, \ldots, A_m$ można usadzić przy okrągłym stole zgodnie z warunkami zadania.
3. $m=n$. Niech $l = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Z założenia pewne dwie osoby spośród A_1, A_l oraz A_m znają się. Stąd wynika, że osoby należące do co najmniej jednego spośród zbiorów
$$\{A_1, A_2, \ldots, A_l\},\ \{A_l, A_{l+1}, \ldots, A_m\},\ \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$$
mogą usiąść przy okrągłym stole zgodnie z warunkami zadania. Pozostaje zauważyć, że każdy z tych trzech zbiorów liczy co najmniej $n/2$ osób.

Zadanie 6. W pewnym turnieju uczestniczyło n zawodników. Każdy z nich rozegrał jedną partię z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Udowodnić, że albo można podzielić uczestników turnieju na takie dwie grupy A i B, że każdy zawodnik z grupy A wygrał z każdym z grupy B, albo można ustawić uczestników w ciąg u_1, u_2, …, u_n tak, że u_1 wygrał z u_2, u_2 wygrał z u_3, …, u_{n-1} wygrał z u_n, u_n wygrał z u_1.

Rozwiązanie

Dowolny ciąg zawodników v_1, v_2, …, v_k taki, że v_1 wygrał z v_2, v_2 wygrał z $v_3, \ldots, v_{k-1}$ wygrał z v_k, v_k wygrał z v_1 $(k \geqslant 2)$, będziemy nazywać *cyklem*.

Rozważymy dwa przypadki:

1. Nie istnieje ani jeden cykl. Weźmy pod uwagę zawodnika u, który wygrał najwięcej partii (jeśli jest kilku takich zawodników, wybieramy dowolnego z nich). Rozumując jak w zadaniu 2, jeśli istnieje zawodnik v, który wygrał z u, to istnieje taki zawodnik w, który przegrał z u oraz wygrał z v, co stanowi sprzeczność z założeniem rozważanego przypadku. Oznacza to, iż zawodnik u wygrał ze wszystkimi; jako zbiór A bierzemy więc $\{u\}$, a jako B zbiór wszystkich pozostałych zawodników.

2. Istnieje co najmniej jeden cykl. Niech m będzie największą liczbą naturalną taką, że istnieje cykl długości m. Jeżeli $m = n$, to teza zadania jest prawdziwa (istotnie — zachodzi jedna z postulowanych możliwości). Przypuśćmy zatem, że $m < n$ i oznaczmy cykl długości m jako
$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_m \to v_1.$$
Niech w będzie dowolnym zawodnikiem różnym od $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Udowodnimy, że wszyscy zawodnicy cyklu uzyskali w meczu z zawodnikiem w ten sam rezultat (wszyscy wygrali albo wszyscy przegrali). Gdyby tak nie było, to moglibyśmy wskazać dwóch kolejnych zawodników v_i, v_{i+1} (przyjmujemy $v_{m+1} = v_1$), z których pierwszy wygrał z zawodnikiem w, a drugi przegrał. Umieszczając między v_i a v_{i+1} zawodnika w stworzylibyśmy nowy, dłuższy cykl, co przeczyłoby maksymalności liczby m.
Tak więc każdy zawodnik spoza maksymalnego cyklu albo wygrał, albo przegrał wszystkie mecze z zawodnikami należącymi do tego cyklu. Możemy podzielić wszystkich zawodników różnych od $v_1, v_2, \ldots, v_m$ na dwa podzbiory: C, złożony z zawodników, którzy wygrali ze wszystkimi $v_1, v_2, \ldots, v_m$, oraz D, składający się z zawodników, którzy przegrali partie z $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Oczywiście, może się zdarzyć, że jeden ze zbiorów C, D jest pusty; nie mogą być jednak oba puste, gdyż założyliśmy, że $m<n$. Jeśli C jest pusty, bierzemy
$$A = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\},\ B = D,$$

jeżeli zaś zbiór D jest pusty, kładziemy

$$A = C, \;\; B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

i teza zadania jest spełniona w obu tych przypadkach.

Przypuśćmy więc, że oba zbiory C, D są niepuste. Niech u będzie dowolnym zawodnikiem ze zbioru C, a v dowolnym zawodnikiem ze zbioru D. Załóżmy, że v wygrał z u. Zawodnik u wygrał, a zawodnik v przegrał spotkania z wszystkimi $v_1, v_2, \ldots, v_m$, otrzymujemy więc cykl

$$v \to u \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m \to v,$$

który jest długości $m+2$, co stanowi sprzeczność z maksymalnością m, zatem zawodnik v przegrał z u. Skoro zawodnicy u, v byli wybrani dowolnie, dowodzi to, że każdy zawodnik ze zbioru C wygrał z każdym zawodnikiem ze zbioru D, a zatem podział

$$A = C, \quad B = D \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

spełnia warunki zadania.

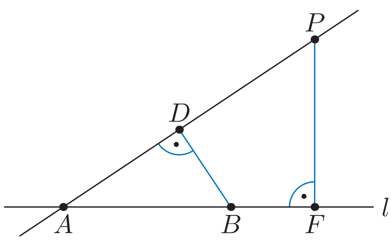
Zadanie 7. *Problem Sylvestera*: Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów o tej własności, że dowolna prosta przechodząca przez dwa punkty tego zbioru przechodzi jeszcze przez trzeci. Udowodnić, że wszystkie punkty z tego zbioru leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że punkty nie leżą na jednej prostej. Spośród wszystkich par

$$\{\text{prosta przez dwa punkty zbioru, punkt zbioru poza tą prostą}\}$$

wybieramy tę, która realizuje najmniejszą możliwą odległość punktu od prostej. Oznaczmy odpowiednio tę prostą i punkt przez l i P (patrz rysunek 3).



Rysunek 3

Niech F będzie rzutem punktu P na prostą l; wówczas PF jest odległością P od l. Zgodnie z założeniem na prostej l istnieją trzy punkty naszego zbioru, zatem co najmniej dwa leżą po jednej stronie punktu F — nazwijmy je A, B, przy czym A, B, F leżą na prostej w tej kolejności (może zajść $B = F$).

Oznaczmy przez D rzut punktu B na prostą AP. Skoro $AB \leqslant AF$, to pole trójkąta ABP jest nie większe od pola trójkąta AFP, innymi słowy zachodzi nierówność $AP \cdot BD \leqslant AF \cdot PF$. Ponadto $AP > AF$ na mocy twierdzenia Pitagorasa, więc $BD < PF$. To daje sprzeczność z określeniem punktu P.

Zadanie 8. Siedmiu krasnoludków siedziało przy okrągłym stole i każdy z nich miał przed sobą szklankę mleka. Poczynając od Gapcia każdy krasnoludek po kolei (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) podzielił zawartość swojej szklanki równomiernie pomiędzy szklanki pozostałych. Kiedy wszystkie krasnoludki to uczyniły, okazało się, że pierwotny poziom mleka w szklankach został przywrócony. Wiedząc, że krasnoludki miały łącznie 3 litry mleka, znaleźć początkową zawartość szklanek.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x_i ilość mleka, jaką i-ty krasnoludek miał tuż przed tym, jak zaczął się dzielić mlekiem. Przyjmijmy, że x_k jest największe spośród liczb x_i i niech A będzie początkową ilością mleka, jaką miał k-ty krasnoludek. Wówczas

$$x_k = A + \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}) \quad \text{oraz} \quad A = \frac{1}{6}(x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_7).$$

Aby powyższe napisy miały sens dla $k = 1$ i $k = 7$, umawiamy się, że sumy puste $x_1 + x_2 + \ldots + x_{1-1}$ oraz $x_{7+1} + x_{7+2} + \ldots + x_7$ są równe 0.

Wynika stąd, że $x_k = \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_{k+1} + \ldots + x_7)$, ponadto z określenia k mamy $x_k \geqslant x_i$ dla każdego i. Musi być zatem $x_k = x_i$ dla wszystkich i, zatem każdy z krasnoludków miał tę samą ilość mleka tuż przed tym, jak zaczął się dzielić. Jeśli więc Gapcio miał na początku x mleka, to krasnoludek po Gapciu miał na początku $\frac{5}{6}x$ mleka, zatem następny miał $\frac{4}{6}x$ mleka itd. Z założenia, że łącznie krasnoludki miały 3 litry mleka możemy wywnioskować, że poczynając od Gapcia krasnoludki miały 1, 5/6, 4/6, 3/6, 2/6, 1/6 i 0 litrów mleka w swoich szklankach.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 9.

W turnieju tenisowym uczestniczyło n graczy. Każdy rozegrał z każdym innym jeden mecz; nie było remisów. Udowodnić, że istnieje taki gracz A, który każdego innego gracza B pokonał bezpośrednio lub pośrednio, tzn. gracz A wygrał z B lub gracz A pokonał pewnego zawodnika C, który wygrał z graczem B.

Zadanie 10.

W turnieju szachowym każdy zawodnik rozegrał z każdym co najwyżej jedną partię, przy czym liczba partii rozegranych przez każdego z zawodników jest nie mniejsza od ustalonej liczby naturalnej n. Udowodnić, że można podzielić zawodników na dwie grupy A i B w taki sposób, by liczba partii rozegranych przez każdego gracza grupy A z graczami grupy B była nie mniejsza niż $n/2$ i jednocześnie liczba partii rozegranych przez każdego gracza grupy B z graczami grupy A była nie mniejsza niż $n/2$.

Zadanie 11.

Dane są dodatnie liczby całkowite k, n. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna co najmniej $k(n-1)$ innych. Wykazać, że można z tej grupy wybrać n osób, z których każde dwie się znają.

Zadanie 12.

W każdej z trzech szkół uczy się n uczniów. Wiadomo, że każdy z uczniów posiada dokładnie $n+1$ znajomych w szkołach, do których sam nie uczęszcza. Udowodnić, że możemy wybrać po jednym reprezentancie z każdej szkoły tak, aby wybrani wzajemnie się znali.

Zadanie 13.

W n-osobowym stowarzyszeniu działa sześć komisji. W skład każdej z nich wchodzi nie mniej niż $n/4$ osób. Dowieść, że istnieją dwie komisje oraz grupa licząca nie mniej niż $n/30$ osób należących do obu tych komisji.

Zadanie 14.

Na okrągłym torze wyścigowym umieszczono n dyspozytorów tak, że łączna objętość paliwa pozwala na przejechanie całego toru. Udowodnić, że można wybrać taki dyspozytor, że startując od niego i tankując paliwo z napotykanych dyspozytorów, kierowca może przejechać cały tor.

Zadanie 15.

Udowodnić, że dowolny wielościan wypukły posiada dwie ściany o równej liczbie krawędzi.

Zadanie 16.

Na płaszczyźnie leży n punktów zielonych i n punktów różowych. Udowodnić, że można narysować n odcinków o różnokolorowych końcach tak, że żadne dwa odcinki nie stykają się.

O tym, czego zrobić się nie da

Urszula Pastwa i Joachim Jelisiejew

Podczas pracy ze zdolnymi uczniami często można usłyszeć słowa *ale tego się nie da...*. W różnym kontekście — czasami uczniowie są przekonani, że skoro oni nie potrafią rozwiązać zadania bez dodatkowych danych, to nie istnieje rozwiązanie. Czasem myślą, że w zadaniu jest sprzeczność, choć w szczególnym przypadku zadanie nie jest sprzeczne, i właśnie o odkrycie tego faktu chodzi. Czasem pokazanie, że coś jest niemożliwe, jest treścią zadania, a uczeń próbuje zrobić to za pomocą metody *to jest najgorszy przypadek, już gorzej się nie da*, co rzadko daje się sformalizować na tyle, by stało się matematycznym dowodem.

W każdym z tych przypadków (ale też w wielu innych) warto mieć w zanadrzu zadania pokazujące, że można myśleć inaczej, rozwijające matematyczne myślenie i kreatywność. A także po prostu ciekawe, wciągające w matematykę, sprawiające, że chce się szukać dalej.

Część z poniższych zadań to problemy autorstwa Martina Gardnera; niektóre z nich opisano w czasopiśmie *Delta*.

Zadanie 1. Mamy dwa baniaki: w jednym jest woda, w drugim wino. Zaczerpnięto szklankę wina z drugiego baniaka i wlano do pierwszego. Potem przelano szklankę z pierwszego baniaka do drugiego. Czy więcej jest teraz wody w winie, czy wina w wodzie?

Rozwiązanie

Tyle samo jest wody w winie, co wina w wodzie.

W obu naczyniach poziom cieczy nie zmienił się, a więc ile w jednym ubyło wody lub wina, tyle w drugim przybyło.

Zadanie 2. Sześcian o krawędzi 3 chcemy podzielić na 27 sześcianików jednostkowych. Jaka jest najmniejsza liczba cięć, które pozwolą to zrobić? Uzyskane w jakimś cięciu kawałki można ułożyć jedne na drugich i ciąć naraz.

Rozwiązanie

Najmniejsza liczba cięć to sześć.

Jednym z uzyskanych sześcianików będzie ten leżący *w samym środku* dużego sześcianu, niewidoczny przed cięciem. Każde cięcie ujawni najwyżej jedną z jego sześciu ścian, więc cięć musi być co najmniej sześć. Z drugiej strony, aby uzyskać 27 sześcianików wystarczy, jeżeli sześciokrotnie przetniemy duży sześcian tak, by każde z cięć przechodziło przez inną ściankę środkowego małego sześcianiku.

Zadanie 3. Jaś po obiedzie biegnie na przystanek i wsiada w pierwszy nadjeżdżający tramwaj. Jadące w prawo wiozą go do biblioteki, a jadące w lewo — na basen. W każdą stronę tramwaje jeżdżą co dziesięć minut. Okazało się, że Jaś cztery razy częściej bywa na basenie niż w bibliotece. Jak wyjaśnić tę niesymetryczność?

Rozwiązanie

Załóżmy, że tramwaj T_1 do biblioteki przyjeżdża zawsze dwie minuty po tramwaju T_2 jadącym na basen. Jaś wsiada w T_1 tylko, jeżeli przyjdzie na przystanek w ciągu dwóch minut dzielących odjazdy tych tramwajów. Jeżeli przychodzi w ciągu pozostałych ośmiu minut — jedzie na basen.

Zadanie 4. Wyobraźmy sobie, że udało nam się otoczyć Ziemię ściśle przylegającym do równika sznurem. Podobnie oplećmy sznurem pomarańczę wokół jej równika. Do każdego z tych dwóch sznurów dodajmy po jednym metrze. Sznury przestaną przylegać do Ziemi i pomarańczy, pod każdym z nich powstanie luka. Która z tych dwóch luk będzie szersza i o ile?

Rozwiązanie

Rozważmy pętlę otaczającą Ziemię. Niech R oznacza jej promień przed wydłużeniem, a R' po wydłużeniu. W wyniku tego wydłużenia obwód pętli zwiększył się o 1 metr:

$$2\pi R' = 2\pi R + 1, \quad \text{zatem} \quad R' - R = \frac{1}{2\pi}.$$

Wobec tego powstała luka szerokości $1/(2\pi)$. Wynik ten nie zależy od R, więc w przypadku pętli otaczającej pomarańczę powstanie luka tej samej szerokości.

Zadanie 5. Czekoladę o wymiarach 4×6 kostek chcemy podzielić na pojedyncze kostki, za każdym razem przełamując jeden z kawałków na dwie części wzdłuż jednej z linii podziału kostek. Ile co najmniej łamań musimy wykonać?

Rozwiązanie

Po jednym łamaniu otrzymujemy dwa kawałki, po dwóch łamaniach — trzy kawałki itd.; po każdym łamaniu przybywa dokładnie jeden kawałek. Wobec tego niezależnie od sposobu postępowania potrzeba 23 łamań.

Zadanie 6. Która z liczb jest większa: $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

Rozwiązanie

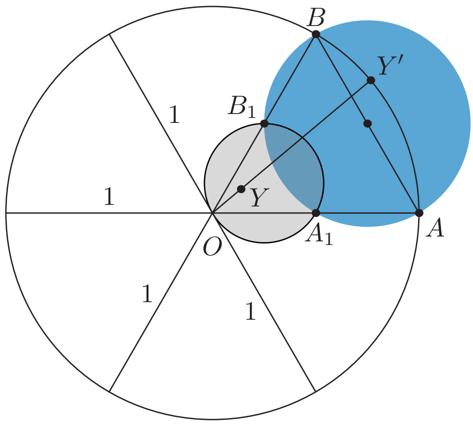
Większa (wielokrotnie) jest pierwsza z liczb:

$$2^{2^{2^{1001}}} = 2^{2^{2\cdot 2^{1000}}} = 2^{2^{2^{1000}+2^{1000}}} = 2^{2^{2^{1000}}\cdot 2^{2^{1000}}} = \left(2^{2^{2^{1000}}}\right)^{2^{2^{1000}}} > 1000^{2^{2^{1000}}}.$$

Zadanie 7. Wewnątrz koła o promieniu 1 wybrano siedem punktów. Wykaż, że pewne dwa z tych punktów są odległe o co najwyżej 1.

Rozwiązanie

Podzielmy koło na sześć identycznych części sześcioma promieniami, jak na rysunku 4. Skoro wybrano siedem punktów, to w którejś z części (lub na jej brzegu) leżą co najmniej dwa z nich — wystarczy pokazać, że są one odległe o co najwyżej 1.



Rysunek 4

Oznaczmy takie dwa punkty przez X i Y, a część, w której leżą, przez O, A, B, patrz rysunek 4. Część tę można pokryć przez dwa koła: kolorowe o średnicy AB i szare, wyznaczone przez O i środki A_1, B_1 odcinków OA i OB.

Szare koło ma średnicę długości $\sqrt{3}/3 < 1$. Jeżeli leżą w nim oba punkty X i Y, to są one odległe o mniej niż 1. Pozostaje więc do rozważenia przypadek, gdy któryś z tych punktów jest poza szarym kołem. Niech będzie to X, wówczas leży on w kole kolorowym.

Zbiór punktów odległych od X o co najwyżej 1 to również koło. Oznaczmy je przez k. Chcemy pokazać, że Y należy do koła k.

Oznaczmy przez Y' punkt przecięcia półprostej OY z obwodem koła danego w zadaniu. Kolorowe koło ma średnicę długości 1, więc każde dwa jego punkty są odległe o co najwyżej 1. W szczególności Y' jest odległy o co najwyżej 1 od X, czyli należy do k.

Odcinek OX zawiera się w pewnym promieniu wyjściowego koła, więc ma długość co najwyżej 1. Zatem także punkt O należy do k. Skoro oba punkty O i Y' należą do koła k, to cały odcinek OY' zawiera się w tym kole, więc również punkt Y należy do koła k, czyli jest odległy od punktu X o co najwyżej 1. To kończy dowód.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 8.

W kuli wywiercono na wylot otwór w kształcie walca o wysokości 6 cm, przechodzący przez środek kuli. Jaka jest objętość pozostałej części kuli?

Zadanie 9.

Jeśli szerokość pewnego prostokąta powiększymy o 50%, to jego szerokość powiększy się o 25%. O ile procent zmniejszy się długość tego prostokąta, jeśli jego długość zmniejszymy o 50%?

Zadanie 10.

Przekątne pewnego trapezu mają długości 15 oraz 20, a jego wysokość wynosi 12. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 11.

Dany jest ostrosłup czworokątny $SABCD$ o podstawie $ABCD$, w którym $AS = BS = DS$ oraz

$$2\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC\,, \quad 2\sphericalangle BSC = \sphericalangle CSD\,, \quad 2\sphericalangle CSD = \sphericalangle DSA\,.$$

Wiadomo też, że $\sphericalangle SAB = 2\sphericalangle SAD$. Wyznacz miarę kąta SAB.

Zadanie 12.

Na pewnej planecie żyje 100 ufoludków, w tym 3 zielonookie i 97 niebieskookich. Na planecie tej nie ma luster i ufoludki nie rozmawiają między sobą na temat koloru oczu – jeśli bowiem jakiś ufoludek pozna kolor swoich oczu, to tego samego dnia wieczorem ginie. Pewnego dnia na planetę przyleciał człowiek, który nie znał tej zasady. Odwiedził on codzienne poranne spotkanie wszystkich ufoludków i powiedział (i wiadomo, że żaden ufoludek nie wątpił w te słowa): *widzę, że wśród was jest co najmniej jeden zielonooki i co najmniej jeden niebieskooki.* Czy i co się wydarzy?

Zadanie 13.

Wewnątrz koła o promieniu 1 wybrano sześć punktów. Wykaż, że pewne dwa z tych punktów są odległe o co najwyżej 1.

Zadanie 14.

Piraci mają łup w postaci 100 dukatów i muszą się nim podzielić. Najpierw uszeregowali wszystkich od najsilniejszego do najsłabszego za pomocą turnieju. Następnie ustalili reguły: najsilniejszy z nich proponuje metodę podziału i określa, kto ma dostać ile dukatów. Propozycja ta jest głosowana i jeśli uzyska co najmniej 50% głosów, staje się ostateczna. Jeśli natomiast większość będzie przeciwko tej propozycji, to pozostali piraci wyrzucają proponenta za burtę do wody pełnej rekinów, a do głosu dochodzi najsilniejszy z pozostałych, który zgłasza kolejną propozycję podziału. Czynności te powtarza się dopóty, dopóki propozycja aktualnie najsilniejszego pirata nie zostanie zaakceptowana.

Piraci działają racjonalnie. Przede wszystkim będą zgłaszać propozycje, które nie spowodują ich kąpieli pośród rekinów. Po drugie, w ramach wszystkich propozycji bezpiecznych dla ich życia będą tak działać, aby zmaksymalizować swój zysk. Po trzecie w końcu, piraci są złośliwi i jeśli mają przy głosowaniu dwie równoważne z ich punktu widzenia decyzje, to ze względu na nabrzmiałe zadry będą głosować przeciwko proponentowi. Oczywiście piraci są rozsądnie myślącymi ludźmi i nie robią błędów logicznych, jeśli chodzi o życie lub pieniądze.

Jeżeli na początku było 6 piratów, co się stanie z kolejnymi proponującymi? A jeśli było 203 piratów? Czy potrafisz rozszerzyć odpowiedź na dowolną liczbę piratów?

Metoda przepchnięć

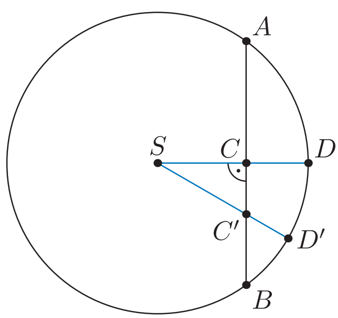
Marta Kamińska

Często przy próbie rozwiązywania zadania polegającego na znalezieniu ekstremalnej figury spełniającej pewne warunki, uczniowie próbują nieformalnie pokazywać, że gdybyśmy *zaburzyli* dowolną figurę tak, aby stała się *bardziej regularna* czyli *bardziej podobna* do kandydata na najlepszą figurę, dostalibyśmy *lepszą* figurę. To intuicyjne, ale też dość nieścisłe rozumowanie, które często zdaje się spisane na niepowodzenie, okazuje się dobrą metodą na rozwiązanie wielu problemów, z którymi niekiedy trudno się uporać w inny sposób. Oczywiście, sam nieścisły pomysł to za mało; rozumowanie wymaga doprecyzowania. Za każdym razem należy dobrze opisać, na czym polegać ma *zaburzenie* i co znaczy *lepsza figura*. Metoda przepchnięć to nieformalna nazwa sposobu rozwiązywania problemów opartego na pomyśle, aby stopniowo poprawiać pewne wielkości, nie zmieniając innych. Nie ma jednego algorytmu postępowania, do każdego zagadnienia należy podejść inaczej. Wspólna jest jedynie idea. A ją najlepiej zobaczyć na przykładach.

Zadanie 1. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C, różnym od punktu S. Pokazać, że $AB > 2CD$.

Rozwiązanie

Ustalmy punkty S, A, B i spróbujmy znaleźć taki punkt D, dla którego odcinek CD jest najdłuższy. Skoro długość promienia $SD = SC + CD$ nie zależy od D, to powinniśmy wybrać D tak, by długość SC była jak najmniejsza; punkt C będzie wtedy rzutem S na odcinek AB. W tym przypadku punkt C jest środkiem odcinka AB, patrz rysunek 5.



Rysunek 5

Przeanalizujmy kąty w trójkącie ADC. Skoro krótszy łuk BD ma długość mniejszą niż ćwierć obwodu okręgu (patrz rysunek 5), to kąt DAC oparty na nim ma miarę mniejszą niż 45°. Wobec tego $\sphericalangle ADC > 45° > \sphericalangle DAC$, stąd $AC > CD$. Ale $AC = AB/2$, czyli $AB > 2CD$.

Punkt D był dobrany tak, że CD miało największą możliwą długość (przy ustalonej długości AB), więc dla wszystkich innych wyborów punktu D tym bardziej zachodzi $AB > 2CD$.

Zadanie 2. Pokazać, że spośród prostokątów o obwodzie 1 największe pole ma kwadrat.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolny, różny od kwadratu, prostokąt P o obwodzie 1. Zastanówmy się, jak zmieni się jego pole, kiedy długości boków zmodyfikujemy tak, aby nie zmienić obwodu. Oznaczmy przez a długość krótszego boku, zaś przez b — długość dłuższego boku tego prostokąta. Jeśli zmniejszymy dłuższy bok o x, krótszy musimy zwiększyć o x, aby obwód pozostał równy $2a+2b$. Oznaczmy prostokąt o bokach długości $b-x$ i $a+x$ przez P_x. Różnica między polami P_x i P wynosi

$$P_x - P = (b-x)(a+x) - ab = x(b-a-x).$$

Jeśli więc $0 < x < b-a$, to pole P_x jest większe niż pole P. W szczególności dla $x = \frac{b-a}{2}$ otrzymujemy, że pole kwadratu o obwodzie 1 jest większe niż pole P. Ponieważ zaś P był dowolnym prostokątem (który nie jest kwadratem) o obwodzie 1, to kwadrat ma największe pole spośród wszystkich prostokątów o obwodzie 1. Co więcej, każdy inny prostokąt o obwodzie 1 ma pole mniejsze od pola tego kwadratu.

Stosując metodę przepchnięć można też niekiedy, jak powyżej, wskazać nie tylko przykład, ale też opisać wszystkie figury ekstremalne. Okazuje się, że taki sposób rozwiązywania problemów ma zastosowania nie tylko w geometrii. Metodą przepchnięć można też wykazać na przykład nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną — i jest to zapewne najbardziej intuicyjny, najmniej magiczny i skomplikowany dowód.

Przypomnijmy, że nierówność jest *symetryczna* ze względu na zmienne $x_1, \ldots, x_n$, jeżeli zamiana dowolnych dwóch z tych zmiennych (tzn. zastąpienie x_2 przez x_1 i na odwrót) nie zmienia jej postaci. Jeżeli nierówność jest symetryczna, to możemy doprowadzić do sytuacji, gdy $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, odpowiednio zamieniając zmienne.

Zadanie 3. *Nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną.*
Jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami nieujemnymi, to spełniona jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Co więcej, równość w tej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Rozwiązanie

Aby lepiej zrozumieć istotę dowodu, wykażemy najpierw tę nierówność dla $n=3$. Oznaczmy przez a, b i c odpowiednio liczby a_1, a_2 i a_3. Ponieważ nierówność, którą chcemy wykazać, jest symetryczna ze względu na a, b, c, możemy bez straty ogólności założyć, że $a \leqslant b \leqslant c$.

Jeśli wszystkie liczby a, b, c są równe, to $\frac{a+b+c}{3}=a=b=c=\sqrt[3]{abc}$, więc w naszej nierówności zachodzi równość. Załóżmy, że nie wszystkie liczby a, b, c są równe. Wówczas najmniejsza z tych liczb, a, jest mniejsza od średniej $\frac{a+b+c}{3}$, a największa z nich, c, jest od średniej większa. Zauważmy, że liczby $a'=a+x$, $b'=b$ oraz $c'=c-x$ mają taką samą średnią arytmetyczną jak liczby a, b i c. Średnia geometryczna liczb a', b' i c' wynosi zaś

$$\sqrt[3]{a'b'c'}=\sqrt[3]{(a+x)b(c-x)}=\sqrt[3]{abc+bx(c-a-x)}.$$

Widzimy stąd, że jeśli $0<x<c-a$, to średnia geometryczna liczb a', b' i c' jest większa od średniej geometrycznej liczb a, b i c. Skoro zaś średnie arytmetyczne tych trójek liczb są takie same, to, aby udowodnić nierówność dla liczb a, b i c, wystarczy udowodnić nierówność dla liczb a', b' i c'. Zauważmy jednak, że jeśli

$$0<x=\frac{a+b+c}{3}-a<c-a,$$

to

$$a'=\frac{a+b+c}{3}=\frac{a'+b'+c'}{3}.$$

Jeśli $b'=\frac{a+b+c}{3}$, to $c'=\frac{a+b+c}{3}$ i otrzymujemy równość w nierówności z zadania. W przeciwnym wypadku powtarzamy przepchnięcie dla liczb b' i c' z trójki a', b', c', otrzymując nową trójkę liczb a'', b'' i c'', tym razem wszystkich równych.

Zauważmy, że jeśli a, b, c nie są równe, to nierówność między średnimi jest ostra, co wynika z tego, że średnia geometryczna liczb a, b i c jest ostro mniejsza niż średnia geometryczna liczb a', b' i c', a ta z kolei jest nie większa niż średnia arytmetyczna liczb a, b i c.

W przypadku ogólnym przeprowadzimy dowód indukcyjny. Jeśli wszystkie liczby $a_1,\ldots,a_n$ są równe, to nierówność między średnimi jest oczywiście spełniona. Przeprowadzimy indukcję w dół po liczbie elementów ciągu $a_1,a_2,\ldots,a_n$, które są równe średniej $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Niech $1\leqslant k\leqslant n$. Załóżmy, że jeśli dokładnie k liczb z ciągu $b_1,b_2,\ldots,b_n$ jest równych średniej $\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$, to zachodzi nierówność między średnimi. Chcemy wykazać, że nierówność między średnimi zachodzi też dla takich liczb a_1, a_2, $\ldots,a_n$, że dokładnie $k-1$ z nich jest równych $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Możemy bez straty ogólności założyć, że $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$. Ponieważ nie wszystkie liczby są równe, to co najmniej jedna z nich jest mniejsza i co najmniej jedna jest większa od $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Niech α będzie dowolną liczbą naturalną, dla której

$$a_\alpha < \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

zaś β — dowolną liczbą naturalną, dla której

$$a_\beta > \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Niech też $b_\alpha = a_\alpha + x$, $b_\beta = a_\beta - x$ oraz $b_j = a_j$ dla j różnych od α lub β. Jeśli $0 < x \leqslant a_\beta$, to tak zdefiniowane liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są nieujemne. Zauważmy, że średnia arytmetyczna liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa średniej arytmetycznej liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Zobaczmy, kiedy średnia geometryczna liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jest większa od średniej geometrycznej liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wystarczy badać, kiedy $b_\alpha b_\beta$ jest większe niż $a_\alpha a_\beta$. Różnica między tymi liczbami wynosi

$$b_\alpha b_\beta - a_\alpha a_\beta = (a_\alpha + x)(a_\beta - x) - a_\alpha a_\beta = x(a_\beta - a_\alpha - x),$$

zatem dla $0 < x < a_\beta - a_\alpha$ średnia geometryczna liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest mniejsza niż średnia geometryczna liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$. W szczególności dla

$$x := \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} - a_\alpha < a_\beta - a_\alpha$$

uzyskujemy

$$b_\alpha = a_\alpha + x = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}.$$

Wobec tego otrzymujemy ciąg $b_1, b_2, \ldots, b_n$ o co najmniej k wyrazach równych $\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$, zatem na mocy założenia indukcyjnego zachodzi

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

co dowodzi kroku indukcyjnego. Co więcej wykazaliśmy, że jeśli nie wszystkie z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są równe średniej $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, to nierówność między średnimi jest ostra.

Zadanie 4. Wykazać, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c sumujących się do jedynki zachodzi nierówność

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Rozwiązanie

Skoro $\frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a} = 1$ i podobnie dla pozostałych zmiennych, to dana nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geqslant \frac{9}{4}. \tag{1}$$

Zauważmy, że $\frac{9}{4} = 3 \cdot \frac{1}{1+1/3}$, więc prawa strona nierówności jest równa lewej, gdy $a = b = c = 1/3$.

Chcemy zminimalizować lewą stronę, zachowując sumę $a+b+c=1$. Wiemy, że jedna z liczb a, b, c jest nie mniejsza od $1/3$; niech będzie to a. Podobnie, jedna z liczb jest nie większa od $1/3$; niech będzie to b. Chcemy wykazać, że jeżeli „zbliżymy” a i b, to lewa strona nierówności (1) nie zwiększy się. Konkretniej, dla każdego $0 \leqslant x \leqslant a-b$ twierdzimy, że

$$\frac{1}{1+(a-x)}+\frac{1}{1+(b+x)} \leqslant \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}. \tag{2}$$

Zaiste:

$$\frac{1}{1+(a-x)}+\frac{1}{1+(b+x)}=\frac{2+a+b}{1+a+b+(a-x)(b+x)}.$$

Podobnie jak w zadaniu 2 sprawdzamy, że $(a-x)(b+x) \geqslant ab$, więc

$$\frac{1}{1+(a-x)}+\frac{1}{1+(b+x)} \leqslant \frac{2+a+b}{1+a+b+ab}=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}.$$

Tym samym nierówność (2) jest udowodniona.

Możemy wziąć $x=a-1/3 \leqslant a-b$, wtedy $a-x=1/3$. Otrzymujemy nierówność

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+(b+x)}+\frac{1}{1+c}.$$

Pozostaje powtórzyć rozumowanie dla liczb $b+x$ i c.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 5.

W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle ACB=120°$. Udowodnić, że

$$CM \geqslant \frac{\sqrt{3}}{6}AB.$$

Zadanie 6.

Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnić, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

Zadanie 7.

Udowodnić nierówność między średnią geometryczną a harmoniczną dla n liczb dodatnich $b_1, b_2, \ldots b_n$:

$$\frac{n}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots\frac{1}{b_n}} \leqslant \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}.$$

Zadanie 8.

Pokazać, że dla trzech liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność między ich średnią arytmetyczną a kwadratową, to jest

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Zadanie 9.

Udowodnić nierówność między średnią arytmetyczną a kwadratową dla n liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots a_n$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2}{n}}.$$

Zadanie 10.

Rozstrzygnąć, kiedy w nierównościach z zadań 7–9 zachodzi równość.

W kierunku odpowiedniej hipotezy

Adam Osękowski

Niniejszy wykład poświęcony jest zadaniom, których celem jest rozstrzygnięcie, czy dane stwierdzenie jest prawdziwe czy też fałszywe. Najczęściej zadanie takie sprowadza się do postawienia odpowiedniej hipotezy i udowodnienia jej prawdziwości. Problemy tego typu są o tyle trudniejsze od innych zadań, iż na początku nie wiadomo, w którą stronę należy się zwrócić; kluczowym podejściem w takich sytuacjach jest rozpatrywanie prostych przykładów.

Przejdźmy do konkretnych zadań. W większości pochodzą one z zawodów Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 1. Na polu, znajdującym się w lewym dolnym rogu tablicy 100×100, stoi pionek. W każdym ruchu pionek może przesunąć się na jedno z sąsiednich pól (tzn. mających bok wspólny z aktualnie zajmowanym polem). Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg ruchów, że każde pole zostanie odwiedzone dokładnie raz oraz na końcu pionek będzie zajmował pole w prawym górnym rogu.

Rozwiązanie

Jest to typowe zadanie, w którym należy najpierw rozważyć kilka prostych przykładów. Mianowicie, spróbujmy zastąpić liczbę 100 znajdującą się w treści zadania przez jakąś małą liczbę naturalną n i sprawdźmy, jaka jest odpowiedź w uproszczonej wersji.

Przypadek $n = 1$. W tej sytuacji początkowe pole jest zarazem ostatnim. Pusty ciąg ruchów spełnia warunki zadania.

Przypadek $n = 2$. Chwila zastanowienia prowadzi do obserwacji, iż dla tej wartości n odpowiedni ciąg ruchów nie istnieje.

Przypadek $n = 3$. Tym razem żądany ciąg ruchów jest łatwy do skonstruowania. Przykładowo, ruszamy się pionkiem w prawo tak długo jak to jest możliwe, następnie wykonujemy ruch w górę; potem wykonujemy ciąg ruchów w lewo aż dotrzemy do lewej krawędzi tablicy; przesuwamy pionek raz w górę; wreszcie, przesuwamy się w prawo aż dotrzemy do pola znajdującego się w prawym górnym rogu. W trakcie wędrówki pionek odwiedza wszystkie pola dokładnie jeden raz. Bardzo łatwo zmodyfikować ten przykład do przypadku, gdy n jest dowolną dodatnią liczbą nieparzystą.

Przypadek $n = 4$. Tu sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana: trochę eksperymentowania prowadzi do przypuszczenia, iż odpowiedni ciąg ruchów nie istnieje.

Powyższe rozumowanie prowadzi do następującej hipotezy: w przypadku, gdy tablica ma wymiary $n \times n$, żądany ciąg ruchów istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą. Podczas powyższych rozważań udowodniliśmy już, że hipoteza zachodzi dla n nieparzystych; pozostaje więc wykazać jej prawdziwość dla n parzystych.

Ustalmy więc dowolną parzystą liczbę n. Kluczowym elementem dowodu powyższej hipotezy jest pokolorowanie pól tablicy „w szachownicę”, tak, by lewe dolne pole było białe. Spodziewamy się, iż istotnym założeniem jest parzystość liczby n — stąd pomysł na to pokolorowanie. Wówczas, jak łatwo zauważyć, w każdym ruchu kolor pola, na którym znajduje się pionek, się zmienia. Wobec tego, jeśli końcowe pole ma mieć biały kolor (a taki kolor ma pole znajdujące w prawym górnym rogu), to pionek musi wykonać parzystą liczbę ruchów. Z drugiej strony, liczba ta wynosi n^2-1 (pionek ma odwiedzić wszystkie pola, przy czym każde z nich dokładnie raz) i jest nieparzysta. Stąd żądany ciąg ruchów nie istnieje.

Zadanie 2. Kwadrat o boku długości n dzielimy na n^2 kwadratów jednostkowych. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których taki kwadrat można pociąć wzdłuż linii tego podziału na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2 lub 3.

Rozwiązanie

Zacznijmy od prostej obserwacji, iż żądane rozcięcie kwadratu istnieje, gdy n jest liczbą parzystą lub podzielną przez 3. Spójrzmy teraz na kilka innych wartości n. Rzecz jasna, dla $n=1$ kwadratu nie da się odpowiednio rozciąć; łatwo też sprawdzić, że jest to także niemożliwe dla $n=5$ oraz $n=7$. Można też sprawdzić „na palcach”, iż $n=11$ nie spełnia warunków zadania (choć jest to dość żmudne).

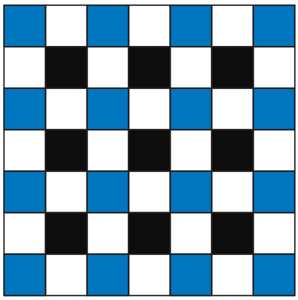
Powyższe próby prowadzą do przypuszczenia, iż żądane rozcięcie kwadratu istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą bądź podzielną przez 3. W świetle poczynionych obserwacji, wystarczy wykazać implikację w prawą stronę, tzn. udowodnić, że dla n niepodzielnych przez 2 i niepodzielnych przez 3 kwadratu nie da się rozciąć w odpowiedni sposób. Ustalmy więc taką liczbę naturalną n.

W jaki sposób udowodnić prawdziwość tego spostrzeżenia? Jako pewną wskazówkę może posłużyć poprzednie zadanie. Spróbujmy pokolorować jednostkowe kwadraty w pewien wzór i wykorzystać jego właściwości. Intuicyjnie rzecz ujmując, poprzez pewne „lokalne” własności kwadratów 2×2 oraz 3×3 wywnioskujemy pewną „globalną” własność kwadratu $n\times n$.

Próba 1. Na początek, spróbujmy pokolorowania „w szachownicę”. Wydaje się, iż ten wzór nie daje żadnych korzyści (choć warto porównać z Próbą 3. poniżej).

Próba 2. Tym razem zastosujmy pokolorowanie w poziome biało-czarne pasy. Zauważmy, że każdy kwadrat 2×2 zawiera tyle samo białych, co czarnych pól; ponadto, w każdym kwadracie 3×3 liczba pól białych jest albo o 3 większa, albo o 3 mniejsza niż liczba czarnych pól. Stąd wniosek, iż jeśli rozcięcie jest możliwe, to różnica między liczbą białych pól a liczbą czarnych pól w kwadracie $n \times n$ jest liczbą podzielną przez 3. Z drugiej strony, ponieważ n nie dzieli się przez 2, różnica ta wynosi n bądź $-n$. Zatem n jest liczbą podzielną przez 3. Ta sprzeczność kończy dowód naszej hipotezy.

Próba 3. Warto tu zaprezentować inne pokolorowanie, które także prowadzi do rozwiązania. Mianowicie, zacznijmy od pokolorowania w czarno-białą szachownicę tak, by rogi szachownicy były czarne; następnie, czarne pola stojące w nieparzystych wierszach przemalujmy na czerwono, patrz rysunek 6.



Rysunek 6

Każdy kwadrat 2×2 zawiera dwa białe pola, jedno czarne i jedno czerwone. Z drugiej strony, w przypadku kwadratu 3×3 są trzy możliwości: zawiera on po dwa pola czarne i czerwone (a pozostałe pięć ma biały kolor); zawiera cztery czarne pola, jedno czerwone i cztery białe; zawiera cztery czerwone pola, jedno czarne i cztery białe. Wobec tego, jeśli rozcięcie jest możliwe i spojrzymy na różnicę między liczbą czarnych i czerwonych pól (koloru białego nie bierzemy pod uwagę), to różnica ta jest liczbą podzielną przez 3. Z drugiej strony, n jest liczbą nieparzystą, a więc różnica ta wynosi

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = -n.$$

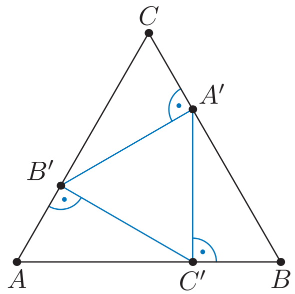
Stąd n dzieli się przez 3, sprzeczność.

Zadanie 3. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, a E będzie zbiorem wszystkich punktów należących do odcinków AB, BC, CA (łącznie z A, B, C). Każdy punkt ze zbioru E malujemy kolorem białym albo czarnym. Rozstrzygnąć, czy można to zrobić w taki sposób, by nie istniał trójkąt prostokątny o jednobarwnych wierzchołkach.

Rozwiązanie

Kilka początkowych prób nie daje odpowiedzi na to, czy żądane pokolorowanie istnieje czy nie. Kluczowa obserwacja, prowadząca do prawidłowej hipotezy, jest następująca. Załóżmy, że odpowiednie kolorowanie jest możliwe oraz że istnieją takie białe punkty $P \in AB$, $Q \in BC$, że $PQ \perp BC$. Wówczas cały odcinek BC (za wyjątkiem punktu Q) musi być czarny. Rozumowanie to pozostaje w mocy, gdy odcinki AB, BC zamienimy na dowolną inną parę boków. Wydaje się, iż takich par punktów P, Q powinno być dużo — prowadzi to do hipotezy, iż pokolorowanie, o którym mowa w zadaniu, nie istnieje.

W celu udowodnienia tej hipotezy, rozważymy pewien szczególny podzbiór zbioru E i wykorzystamy jego geometryczne własności. Mianowicie, załóżmy, że pokolorowanie istnieje i rozważmy takie punkty $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$, że trójkąt $A'B'C'$ jest równoboczny oraz $A'C = B'A = C'B = AB/3$, patrz rysunek 7.



Rysunek 7

Wówczas, jak łatwo sprawdzić, mamy $A'B' \perp BC$, $B'C' \perp CA$, $C'A' \perp AB$. Pewne dwa punkty ze zbioru $\{A', B', C'\}$ mają ten sam kolor — bez straty ogólności możemy założyć, że A' i B' są białe. Wówczas wszystkie punkty z odcinka BC, za wyjątkiem punktu A', są czarne. Stąd wniosek, iż wszystkie punkty odcinka AB, za wyjątkiem punktu B, są białe: w przeciwnym razie, po zrzutowaniu odpowiedniego czarnego punktu prostopadle na bok BC skonstruowalibyśmy trójkąt o czarnych wierzchołkach. Wobec tego trójkąt $AB'C'$ ma wszystkie wierzchołki białe.

Zadanie 4. Każdy punkt okręgu malujemy kolorem białym albo czarnym. Rozstrzygnąć, czy można to zrobić w taki sposób, by nie istniał trójkąt równoramienny o jednobarwnych wierzchołkach.

Rozwiązanie

Kilka prób i eksperymentów prowadzi do hipotezy, iż pokolorowanie, o którym mowa w zadaniu, nie istnieje. W jaki sposób możemy to udowodnić?

Pewną podpowiedź w tym kierunku daje nam poprzednie zadanie, w którego rozwiązaniu kluczowym obiektem był trójkąt równoboczny $A'B'C'$. To sugeruje, by poszukać jakiegoś specjalnego podzbioru okręgu, a następnie wykorzystać jego geometryczne własności. Chwila zastanowienia prowadzi do pomysłu, by rozważyć n-kąt foremny wpisany w dany okrąg. Dalej, rozpatrujemy kolejne wartości n. Dla $n = 3$ oraz $n = 4$ nie dostajemy żadnych istotnych wniosków. Wybór $n = 5$ daje rozwiązanie zadania. Istotnie: pewne trzy wierzchołki wpisanego pięciokąta mają tę samą barwę oraz, na mocy własności pięciokąta foremnego, są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Zadanie 5. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele trójek (a,b,c) liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie

$$a^2+b^2+c^2=3abc.$$

Rozwiązanie

Jest to o tyle trudne zadanie, że w zależności od tego, czy chcemy udowodnić, iż odpowiedź brzmi tak czy nie, musimy posługiwać się zupełnie innymi narzędziami. Aby wykazać, że liczba rozwiązań powyższego równania jest skończona, najprawdopodobniej musielibyśmy skorzystać z kongruencji lub podzielności. Próba dowodu, iż liczba rozwiązań jest nieskończona, prowadzi nas do pytania o wzory tychże trójek, ewentualnie do opisania „indukcyjnej procedury” ich uzyskiwania.

Aby zyskać nieco intuicji, zacznijmy od poszukania kilku rozwiązań składających się z niewielkich liczb naturalnych. Pierwszym pomysłem jest uporządkowanie liczb (bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a \leqslant b \leqslant c$) oraz wzięcie $a=1$. Doprowadza to do równania

$$1+b^2+c^2=3bc.$$

W zasadzie od razu zgadujemy rozwiązania $(1,1,1)$, $(1,1,2)$. Po kilku próbach dostajemy kolejne: $(1,2,5)$, $(1,5,13)$. Spójrzmy teraz na te cztery trójki: $(1,1,1) \to (1,1,2) \to (1,2,5) \to (1,5,13)$. Jak łatwo zauważyć, każde kolejne dwie z nich są postaci

$$(1,b,c) \to (1,c,3c-b). \tag{3}$$

Innymi słowy, dochodzimy do hipotezy: jeśli $(1,b,c)$ spełniają wyjściowe równanie, to $(1,c,3c-b)$ także je spełniają. Dowód tej hipotezy jest bardzo prosty:

$$1^2+c^2+(3c-b)^2=(1^2+b^2+c^2)+9c^2-6bc=3bc+9c^2-6bc=3c(3c-b).$$

Pozostaje już tylko zauważyć, że w wyniku przejścia (3) otrzymujemy rozwiązanie o większej trzeciej współrzędnej: $3c-b>c$. To gwarantuje, iż (3) generuje nieskończenie wiele parami różnych rozwiązań wyjściowego równania.

Zadanie 6. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele trójek (a,b,c) liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie

$$a^2+b^2+c^2=4abc. \tag{4}$$

Rozwiązanie

Sytuacja jest bardzo podobna jak w poprzednim zadaniu. Tym razem kilka prostych podstawień nie daje rozwiązań. Po kilku(nastu) próbach naturalne jest przypuszczenie, iż rozwiązań nie ma wcale. Spróbujmy dowieść tej hipotezy za pomocą teorii liczb; ze względu na obecność czynnika 4 po prawej stronie, nasuwa się pomysł, by rozważyć podzielność przez 2. Załóżmy, że liczby a, b, c spełniają żądaną równość i niech

$$a=2^p a_1, \quad b=2^q b_1, \quad c=2^r c_1,$$

gdzie p, q, r to liczby całkowite nieujemne oraz a_1, b_1, c_1 są nieparzyste. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p \leqslant q \leqslant r$. Wstawiając te równości do (4), otrzymujemy

$$2^{2p}a_1^2 + 2^{2q}b_1^2 + 2^{2r}c_1^2 = 4 \cdot 2^{p+q+r}a_1b_1c_1.$$

Po podzieleniu obu stron przez 2^{2p}, dostajemy równość

$$a_1^2 + 2^{2q-2p}b_1^2 + 2^{2r-2p}c_1^2 = 4 \cdot 2^{q+r-p}a_1b_1c_1.$$

Jeśli $q > p$, to dostajemy sprzeczność: istotnie, wówczas także $r > p$ i w konsekwencji lewa strona jest liczbą nieparzystą, a prawa — parzystą. Wobec tego zachodzi $p = q$ i powyższa równość przybiera postać

$$a_1^2 + b_1^2 + 2^{2r-2p}c_1^2 = 4 \cdot 2^r a_1b_1c_1,$$

bądź, równoważnie,

$$a_1^2 + b_1^2 = 4 \cdot 2^r a_1b_1c_1 - 2^{2r-2p}c_1^2.$$

Wynika stąd, że $r > p$: istotnie, w przeciwnym razie lewa strona byłaby parzysta, a prawa — nieparzysta. Wobec tego, prawa strona jest liczbą podzielną przez 4. Z drugiej strony, kwadrat liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1; zatem lewa strona jest liczbą niepodzielną przez 4. Otrzymana sprzeczność dowodzi, iż równanie (4) nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Zadanie 7. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{8a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{8b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{8c^2 + (a+b)^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie

Zastanówmy się, w jaki sposób może przebiegać dowód powyższej nierówności. Można sprytnie dobierać w pary wyrażenia stojące po lewej stronie, bądź próbować stosować znane oszacowania (nierówności dla średnich, nierówności Schwarza itp.). My pójdziemy nieco inną drogą. Idea jest następująca: przypuśćmy, że uda nam się dowieść oszacowanie

$$\frac{a^2}{8a^2 + (b+c)^2} \leqslant A(a,b,c), \tag{5}$$

gdzie $A(a,b,c)$ jest pewnym wyrażeniem zależącym od a, b oraz c. Wtedy otrzymamy cykliczne nierówności

$$\frac{b^2}{8b^2 + (c+a)^2} \leqslant A(b,c,a) \quad \text{oraz} \quad \frac{c^2}{8c^2 + (a+b)^2} \leqslant A(c,a,b).$$

Jeśli więc spełniony będzie dodatkowy warunek

$$A(a,b,c) + A(b,c,a) + A(c,a,b) \leqslant \frac{1}{4}, \tag{6}$$

to dowód będzie zakończony. Główną trudnością jest teraz odgadnięcie odpowiedniego wyrażenia $A(a,b,c)$. Warunek (6) podpowiada następujący pomysł: jeśli przyjąć, iż w oszacowaniu tym zachodzi równość, nasuwa się wybór

$$A(a,b,c) = \frac{a}{4(a+b+c)}.$$

Sprawdźmy, czy nierówność (5) jest spełniona; równoważnie, czy zachodzi

$$4a(a+b+c) \leqslant 8a^2 + (b+c)^2,$$

czyli $(2a-b-c)^2 \geqslant 0$. Ostatnie oszacowanie jest oczywiście prawdziwe; stąd teza.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 8.

Rozważamy grę jednoosobową na nieskończonej szachownicy opartą na następującej regule. Jeżeli na dwóch polach mających wspólny bok stoją piony i następne pole jest puste (trzy omawiane pola leżą na jednej linii poziomej lub pionowej), to możemy te piony usunąć i postawić jeden pion na trzecim z tych pól (które było puste). W pozycji początkowej piony wypełniają kwadrat $n \times n$. Dla jakich n możemy otrzymać pozycję, w której na szachownicy jest tylko jeden pion?

Zadanie 9.

Każdy punkt okręgu malujemy kolorem białym, czarnym lub czerwonym. Rozstrzygnąć, czy można to zrobić w taki sposób, by nie istniał trójkąt równoramienny o jednobarwnych wierzchołkach.

Zadanie 10.

Rozstrzygnąć, czy każdy prostokąt, który można pokryć 25 kołami o promieniu 2, można też pokryć 100 kołami o promieniu 1.

Zadanie 11.

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna $n > 1$, że liczba $2^n - 1$ dzieli się przez n.

Zadanie 12.

Wykazać, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c sumujących się do jedynki zachodzi nierówność

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Zadanie 13.

Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami nieujemnymi, to

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b).$$

Geometryczne puzzle

Łukasz Rajkowski

Jeśli w zadaniu geometrycznym należy obliczyć sumę długości odcinków, czasem warto zbudować odcinek o szukanej długości, a następnie obliczyć jego długość. Podobnie można postępować obliczając pola figur — warto „ułożyć” figurę z kilku mniejszych „puzzli”, czyli figur. Metodę tę najlepiej ilustrują poniższe przykłady.

Zadanie 1. W kwadracie $ABCD$ punkty P, Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD w taki sposób, że $\sphericalangle PAQ = 45^\circ$. Udowodnij, że $BP + DQ = PQ$.

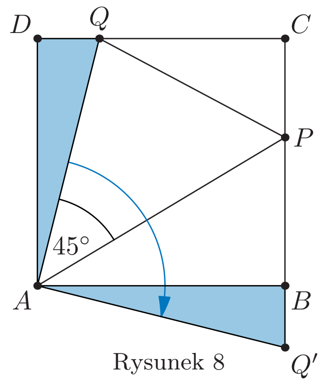
Rozwiązanie

Obróćmy trójkąt ADQ o kąt 90° tak, by punkt D przeszedł na punkt B (patrz rys. 8); otrzymujemy trójkąt ABQ'. Skoro

$$\sphericalangle PAQ' = \sphericalangle PAB + \sphericalangle DAQ = 45^\circ = \sphericalangle PAQ$$

oraz $AQ = AQ'$, to prosta AP jest symetralną odcinka QQ', więc

$$PQ = PQ' = BP + BQ' = BP + DQ.$$

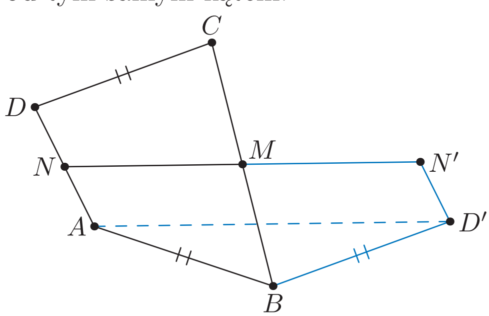


Rysunek 8

Zadanie 2. W czworokącie $ABCD$ spełniona jest równość $AB = CD$. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków BC i DA. Wykaż, że prosta MN przecina proste AB i CD pod tym samym kątem.

Rozwiązanie

Obróćmy czworokąt $NMCD$ wokół punktu M o 180°, otrzymując czworokąt $N'MBD'$, patrz rys. 9. Proste CD i BD' są równoległe, więc przecinają prostą MN pod tym samym kątem.



Rysunek 9

Odcinki AN i $D'N'$ są równoległe i równe, więc $ANN'D'$ jest równoległobokiem, stąd $AD' \parallel MN$.

Z równości odcinków $AB = CD = BD'$ wynika, że proste AB i BD' tworzą z prostą AD' równe kąty, zatem na mocy równoległości $AD' \parallel MN$ tworzą one równe kąty również z prostą MN.

Pokazaliśmy kolejno, że równe są kąty między parami prostych: MN i CD, MN i BD', AD' i BD', AD' i AB, MN i AB, co kończy dowód.

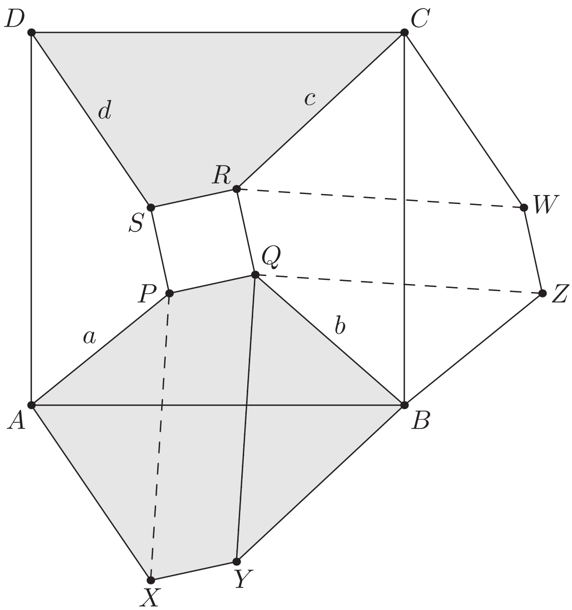
Zadanie 3. Kwadrat $PQRS$ leży wewnątrz kwadratu $ABCD$, przy czym czworokąty $APQB$, $BQRC$, $CRSD$, $DSPA$ są wypukłe. Wykaż, że

$$[ABQP] + [CDSR] = [BCRQ] + [DAPS],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ jest polem figury $\mathcal{F}$.

Rozwiązanie

Przesuńmy czworokąt $DCRS$ w dół, otrzymując $ABYX$, a czworokąt $APSD$ w prawo, otrzymując $BZWC$, patrz rys. 10.



Rysunek 10

Chcemy pokazać, że pola figur $APQBYX$ i $BQRCWZ$ są równe. Odcinki DC i SW są równoległe i równej długości; podobnie DA i SX. Tym samym trójkąt XSW przystaje do trójkąta ADC, a więc jest prostokątny i równoramienny. Ponadto odcinki SR i SP są prostopadłe i równej długości. Wobec tego trójkąt SRW otrzymujemy poprzez obrót trójkąta SPX o kąt prosty wokół S, stąd również odcinki PX i RW są prostopadłe i równej długości; oznaczmy $s := PX = RW$.

Czworokąty $PQYX$ i $QRWZ$ są równoległobokami. Niech O będzie środkiem kwadratu $PQRS$; ze względu na wcześniejsze obserwacje równoległobok

$QRWZ$ można uzyskać z $PQYX$ poprzez obrót wokół punktu O. Z założeń zadania wynika, że sześciokąt $APQBYX$ jest wypukły, zawiera więc równoległobok $PQYX$; analogicznie $BQRCWZ$ zawiera równoległobok $QRWZ$. Pozostaje udowodnić, że

$$[APX]+[BQY]=[BQZ]+[CRW]. \tag{7}$$

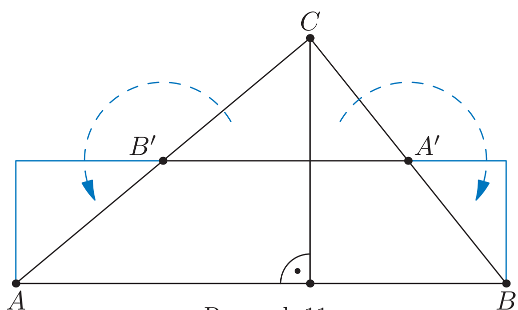
Przesuńmy punkt A o wektor PQ i oznaczmy otrzymany punkt przez A'. Dwie pary boków trójkątów $AA'B$ i SRW są równe i równoległe, więc zachodzi także równość dla trzeciej pary boków: $A'B=RW=s$.

Niech $AP=a$, $BQ=b$, $CR=c$, $DS=d$. Jeśli połączymy trójkąty AXP i BYQ, przesuwając pierwszy z nich o wektor PQ, otrzymamy czworokąt $A'YBQ$ o kolejnych bokach długości a, b, c, d i obu przekątnych o długości s. Analogicznie pokazujemy, że trójkąty BQZ i CRW możemy skleić tak, aby otrzymać czworokąt o kolejnych bokach a, b, c, d i obu przekątnych długości s. Takie dwa czworokąty są przystające, co kończy dowód równości (7).

Zadanie 4. Uzasadnij, że dowolny trójkąt da się pociąć na kawałki, z których można zbudować prostokąt.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolny trójkąt ABC i opuśćmy wysokość z wierzchołka przy kącie o największej mierze.



Rysunek 11

Niech B' i A' oznaczają odpowiednio środki boków AC i BC. Wysokość opuszczona z wierzchołka C oraz odcinek $A'B'$ rozcinają trójkąt ABC na cztery kawałki, z których można złożyć prostokąt, jak pokazano na rysunku 11.

Uogólnieniem zadania 4 jest *twierdzenie Wallace'a-Bolyaia-Gerwiena*, które mówi, że mając dane dwa wielokąty o równych polach możemy pociąć jeden z nich na kawałki, z których można zbudować drugi. By je udowodnić, wystarczy dowolny wielokąt pociąć na kawałki, z których można złożyć kwadrat.

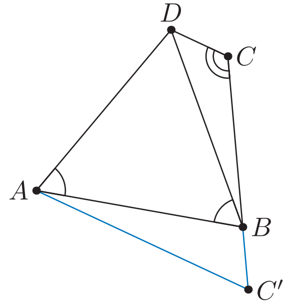
Zadanie 5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości kątów

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD = 60^\circ \quad \text{i} \quad \sphericalangle BCD = 120^\circ.$$

Udowodnij, że $BC + DC = AC$.

Rozwiązanie

Rozważmy taki obrót o 60° wokół punktu A, przy którym punkt D przechodzi na punkt B. Oznaczmy obraz trójkąta ADC przy tym obrocie jako ABC', patrz rys. 12.



Rysunek 12

Skoro $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$, to

$$\sphericalangle ABC' + \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ,$$

więc punkty C, B, C' są współliniowe. Co więcej, ze względu na zastosowany obrót mamy $AC = AC'$ oraz $\sphericalangle CAC' = 60^\circ$, więc trójkąt ACC' jest równoboczny i zachodzi równość

$$BC + DC = BC + BC' = CC' = AC.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 6.

W pięciokącie $ABCDE$ zachodzą równości $AB = CD = DE = BC + EA = 1$ oraz $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ$. Znajdź pole tego pięciokąta.

Zadanie 7.

W kwadracie $ABCD$ punkt Q leży na boku CD, a dwusieczna kąta QAB przecina bok BC w punkcie P. Udowodnij, że $BP + DQ = AQ$.

Zadanie 8.

Wierzchołki czworokąta $ABCD$ należą do różnych boków kwadratu jednostkowego. Wykaż, że obwód tego czworokąta wynosi co najmniej $2\sqrt{2}$.

Zadanie 9.

W czworokącie $ABCD$ punkty M i N są środkami odpowiednio boków BC i DA. Udowodnij nierówność $2MN \leqslant AB+CD$. Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 10.

Punkt M jest środkiem boku BC czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym spełniona jest równość $\sphericalangle AMB = 135°$. Wykaż, że

$$AD \leqslant AB+CD+\frac{BC}{\sqrt{2}}.$$

Zadanie 11.

W kwadracie $ABCD$ o polu 1 punkty P, Q, R, S są środkami boków odpowiednio AB, BC, CD i DA. Znajdź pole kwadratu wyznaczonego przez proste AQ, BR, CS, DP.

O pewnym podejściu do zadań z geometrii przestrzennej

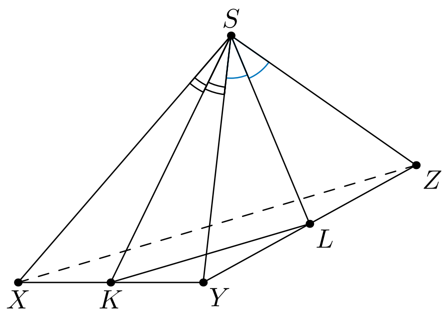
Adam Osękowski

Celem niniejszego wykładu jest zaprezentowanie kilku zadań z geometrii przestrzennej, które tak naprawdę sprowadzają się do odpowiednich zagadnień z geometrii dwuwymiarowej. Tego typu sytuacja ma miejsce dość często i wówczas ważnym elementem podczas rozwiązywania jest umiejętność „wyizolowania" odpowiedniego problemu płaskiego (który czasami może być sam w sobie trudnym zagadnieniem). Przejdźmy do przykładów.

Zadanie 1. W czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.

Rozwiązanie

Oznaczmy wspólny wierzchołek przez S. Na półprostych wychodzących z tego wierzchołka i zawierających krawędzie czworościanu wybierzmy takie punkty X, Y, Z, że $SX = SY = SZ = d$. Wówczas dwusieczne kątów XSY, YSZ i ZSX są prostopadłe do prostych XY, YZ i ZX odpowiednio i dzielą te odcinki na połowy. Oznaczmy $XY = a$, $YZ = b$, $ZX = c$ i niech K, L, M będą środkami odcinków XY, YZ oraz ZX, patrz rysunek 13.



Rysunek 13

Wyznaczymy teraz warunek, który jest równoważny prostopadłości prostych SK i SL. Zauważmy najpierw, iż na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$SK^2 = SY^2 - KY^2 = d^2 - \frac{1}{4}a^2$$

oraz, analogicznie,

$$SL^2 = SY^2 - LY^2 = d^2 - \frac{1}{4}b^2.$$

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa zachodzi równość $KL = \frac{1}{2}ZX = \frac{1}{2}c$.

Następnie, na mocy twierdzenia Pitagorasa, $SK \perp SL$ wtedy i tylko wtedy, gdy $SK^2 + SL^2 = KL^2$. Stosując powyższe równości, dostajemy, iż równość ta ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $2d^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}c^2$, czyli gdy

$$8d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Powyższy warunek jest symetryczny ze względu na zmienne a, b, c, a więc jest on równoważny prostopadłości dowolnych dwóch prostych spośród SK, SL i SM. Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 2. W czworościanie $ABCD$ punkty K, N są środkami krawędzi AD oraz BC, odpowiednio. Na krawędziach AC i BD wybrano punkty M i L takie, że

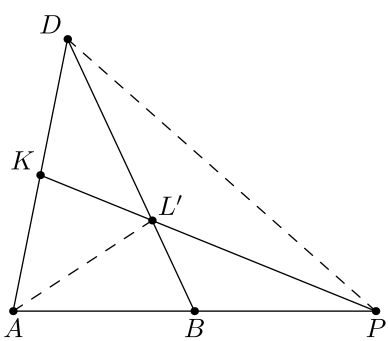
$$\frac{AM}{CM} = \frac{DL}{BL} = 2.$$

Udowodnić, że punkty K, L, M, N leżą w jednej płaszczyźnie.

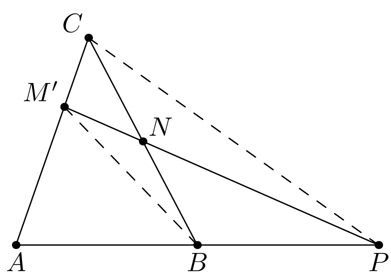
Rozwiązanie

Punkty K, L, M, N są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy proste KL oraz MN są równoległe bądź przecinają się. Kluczowa obserwacja jest następująca: jeśli proste KL i MN się przecinają, to punkt ich przecięcia musi należeć zarówno do płaszczyzny ABD, jak i płaszczyzny ABC. Wynika stąd, że należy on do części wspólnej tych dwóch płaszczyzn, czyli do prostej AB. To rozbija zadanie na dwa prostsze zagadnienia z geometrii płaskiej: wystarczy zidentyfikować punkty $AB \cap KL$ oraz $AB \cap MN$, a następnie wykazać, że te punkty pokrywają się.

Rozważmy najpierw płaszczyznę ABD (por. rysunek 14).



Rysunek 14



Rysunek 15

Na prostej AB wybierzmy punkt P taki, że B jest środkiem odcinka AP. Oznaczmy przez L' punkt przecięcia prostych PK oraz BD. Ponieważ B jest środkiem odcinka AP, to trójkąty ABL' oraz BPL' mają to samo pole;

innymi słowy,

$$pole(BPL') = \frac{1}{2} pole(APL'). \tag{8}$$

Z twierdzenia Talesa lub podobieństwa trójkątów wynika, iż wysokości opuszczone z punktów D i A na prostą PK mają tę samą długość, zatem trójkąty APL' oraz PDL' mają równe pola. W połączeniu z (8) oznacza to, że

$$pole(BPL') = \frac{1}{2} pole(PDL').$$

Biorąc pod uwagę fakt, iż oba te trójkąty mają tę samą wysokość opuszczoną z punktu P, wnioskujemy, że $DL' = 2BL'$. Oznacza to, że $L = L'$, a zatem proste KL i AB przecinają się w punkcie P.

Przejdźmy teraz do analizy płaszczyzny ABC (por. rysunek 15).

Oznaczmy przez M' punkt przecięcia prostych PN oraz AC. Argumentując jak w przypadku trójkątów APL' i PDL' stwierdzamy, że trójkąty BPM' oraz PCM' mają takie same pola. Z drugiej strony, trójkąty ABM' i BPM' także mają równe pola. Stąd płynie wniosek, iż

$$pole(PCM') = pole(BPM') = pole(ABM') = \frac{1}{3} pole(APC).$$

Wobec tego $pole(APM') = pole(ABM') + pole(BPM') = \frac{2}{3} pole(APC)$, skąd otrzymujemy $AM'/AC = 2/3$ oraz $M = M'$. Zatem proste MN i AB przecinają się w punkcie P. Dowód tezy zadania jest zakończony.

Zadanie 3. W czworościanie $ABCD$ zachodzą następujące równości:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC.$$

Dowieść, że krawędzie AB i CD mają jednakową długość.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania nie jest prawdziwa; bez straty ogólności możemy założyć, że $AB > CD$. Następnie narysujmy siatkę $AD_1CD_2BD_3$ czworościanu (por. rysunek 16 poniżej) i na boku AB wybierzmy punkt E taki, że $EB = CD$.

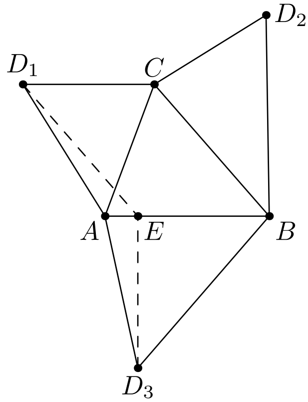
Na mocy warunków zadania mamy $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD_1$, skąd wynika, że proste AB oraz CD_1 są równoległe. Ponieważ $EB = CD_1$, wnioskujemy stąd, że czworokąt $EBCD_1$ jest równoległobokiem oraz

$$ED_1 = BC. \tag{9}$$

Z drugiej strony, trójkąty BD_2C oraz D_3BE są przystające, na mocy cechy bok-kąt-bok, gdyż $AD_1CD_2BD_3$ jest siatką czworościanu. W szczególności oznacza to, że $BC = ED_3$, co w połączeniu z (9) daje równość $ED_1 = ED_3$. Ponadto, mamy $AD_1 = AD_3$. Zatem czworokąt AD_3ED_1 jest deltoidem, skąd wynika równość

$$\sphericalangle EAD_3 = \sphericalangle EAD_1 = \sphericalangle EAC + \sphericalangle CAD_1.$$

To zaś oznacza sprzeczność: w niezdegenerowanym kącie trójściennym suma dowolnych dwóch kątów płaskich jest większa od trzeciego.



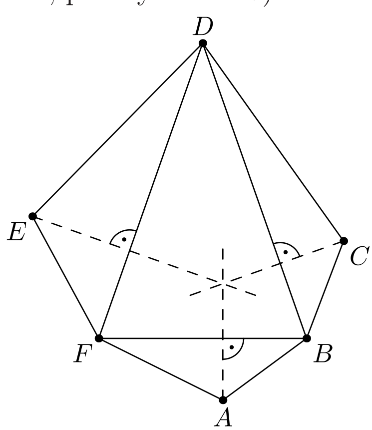
Rysunek 16

Uzyskana sprzeczność oznacza, że $AB = CD$, co kończy dowód.

Zadanie 4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą następujące równości: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF i FAB poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Przede wszystkim na pierwszy rzut oka nie jest to zadanie przestrzenne. Po chwili zastanowienia widać jednak pewne aspekty trójwymiarowe — przynajmniej dla niektórych konfiguracji punktów A, B, C, D, E i F. Mianowicie, dzięki równościom zakładanym w treści, możemy potraktować sześciokąt jako siatkę ostrosłupa o podstawie BDF i wierzchołku G (który w siatce „rozpada" się na punkty A, C oraz E, por. rysunek 17).



Rysunek 17

Załóżmy, że taka konfiguracja ma miejsce. Pokażemy, że szukany punkt przecięcia jest spodkiem H wysokości czworościanu, opuszczonej z punktu G na podstawę BDF. Oznaczmy przez H_G spodek wysokości opuszczonej z G w trójkącie GBD. Proste GH i GH_G są prostopadłe do prostej BD, więc również prosta HH_G jest prostopadła do BD. Co więcej, punkt H_G pokrywa się ze spodkiem wysokości h opuszczonej z punktu C w trójkącie BCD. Zatem prosta HH_G pokrywa się z tą wysokością, czyli H należy do h. Podobnie pokazujemy, że H należy do pozostałych wysokości.

Należy tu jednak podkreślić, iż to rozwiązanie jest poprawne tylko w przypadku, gdy sześciokąt $ABCDEF$ rzeczywiście pochodzi od siatki czworościanu. Aby trójkąty BAF, BFD, BDC przystawały do ścian pewnego czworościanu o wierzchołku B potrzeba i wystarcza, by zachodziła następująca nierówność, podobna do nierówności trójkąta

$$\max\left(\sphericalangle ABF, \sphericalangle FBD, \sphericalangle DBC\right) < \frac{1}{2}\sphericalangle ABC. \tag{10}$$

Jeżeli ta nierówność jest spełniona, to możemy skleić wymienione wyżej ściany, otrzymując czworościan, którego czwarta ściana przystaje do trójkąta DEF.

Jeśli sześciokąt $ABCDEF$ nie pochodzi od siatki ostrosłupa, wówczas można go zmodyfikować, odsuwając punkty A, C, E od trójkąta BDF wzdłuż odpowiednich wysokości tak, by uzyskać (10); szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 5.

Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > 360°.$$

Zadanie 6.

Okręgi wpisane w ściany ABC i ABD czworościanu $ABCD$ są styczne do krawędzi AB w tym samym punkcie. Wykazać, że punkty styczności tych okręgów z krawędziami AC, BC oraz AD, BD leżą na jednym okręgu.

Zadanie 7.

W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S oraz podstawie $A_1A_2\ldots A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $60°$. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać punkty $B_2, B_3, \ldots, B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach A_2S, A_3S, ..., A_nS, takie, że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

Zadanie 8.

W czworościanie $ABCD$ krawędź AB jest prostopadła do krawędzi CD i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Udowodnić, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź AB i środek krawędzi CD jest prostopadła do krawędzi CD.

Zadanie 9.

Dany jest czworościan $ABCD$, o którego kątach płaskich wiadomo, że

$$\sphericalangle BAD = 60^\circ,\ \sphericalangle BAC = 40^\circ,\ \sphericalangle ABD = 80^\circ,\ \sphericalangle ABC = 70^\circ.$$

Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe.

Zobaczyć to, czego nie widać: o zadaniach geometrycznych

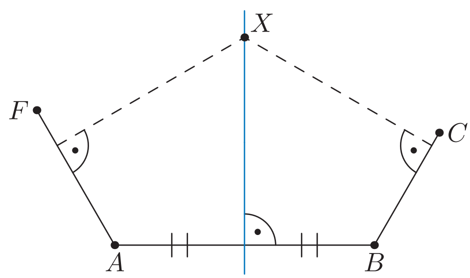
Adam Osękowski

Ponieważ większość zadań z geometrii klasycznej można „podpiąć" pod niniejszy dość ogólny tytuł, zdecydowaliśmy się wybrać jeden konkretny motyw i omówić go na kilku przykładach. Mianowicie, będą nas interesować zadania, których celem jest wykazanie, iż pewne trzy proste przecinają się w jednym punkcie. Choć istnieje szereg twierdzeń, które pozwalają badać problemy tego typu (np. twierdzenie Cevy bądź twierdzenie o osiach potęgowych), nie będziemy ich stosować, prezentując dowody bazujące jedynie na podstawowych faktach z geometrii (ale gorąco zachęcamy Czytelnika do zbadania zadań w kontekście tych twierdzeń). W celach dydaktycznych – a także w nawiązaniu do tytułu artykułu – każde zadanie jest rozwiązane dwoma sposobami: pierwsza metoda ilustruje mniej czy bardziej standardowe podejście, natomiast drugie rozwiązanie ma na celu odsłonięcie ukrytego dna.

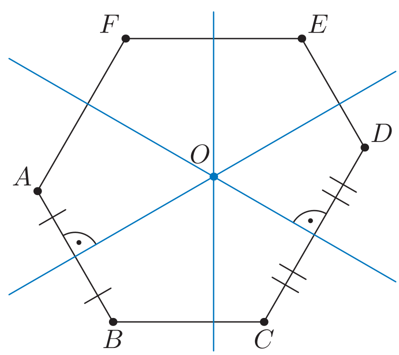
Zadanie 1. Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa $120°$. Udowodnić, że symetralne odcinków AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Kluczowa obserwacja w tym zadaniu jest następująca: ponieważ kąty FAB i ABC mają tę samą miarę, to punkt X należy do symetralnej odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy jest on równo odległy od prostych AF oraz BC oraz leży w odpowiednim kącie ostrym utworzonym przez te proste (patrz rysunek 18).



Rysunek 18

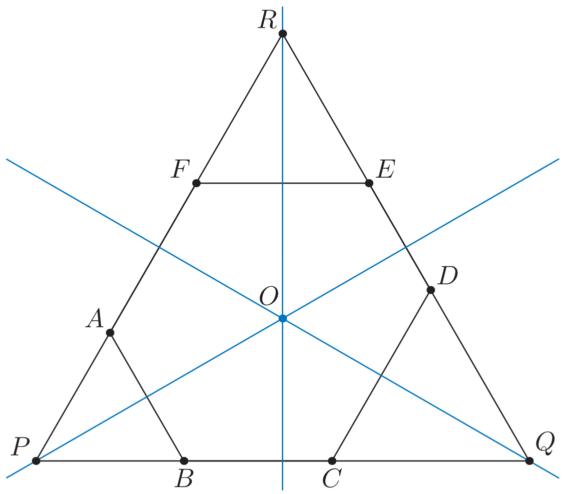


Rysunek 19

Oznaczmy przez O punkt przecięcia symetralnych odcinków AB i CD (patrz rysunek 19). Na mocy powyższej obserwacji, punkt O jest równo odległy od prostych AF, BC oraz równo odległy od prostych BC, DE. A zatem leży on w tej samej odległości od prostych AF i DE, skąd wynika, iż należy on do symetralnej odcinka EF. Punkt O jest więc punktem wspólnym wszystkich trzech symetralnych.

Co tu jest ukryte?

Powstaje naturalne pytanie, czy nie można zidentyfikować w jakiś sposób punktu O. Przedłużmy proste BC, DE oraz FA i oznaczmy odpowiednie punkty przecięcia literami P, Q, R (patrz rysunek 20).



Rysunek 20

Mamy $\sphericalangle PAB = 180° - \sphericalangle FAB = 60°$ oraz $\sphericalangle ABP = 180° - \sphericalangle ABC = 60°$, skąd wynika, iż trójkąt ABP jest równoboczny. Analogicznie rozumowanie daje, iż trójkąty CDQ oraz EFR także są równoboczne, skąd natychmiast wynika, iż trójkąt PQR też jest równoboczny. Wobec tego symetralne odcinków AB, CD, EF to dwusieczne kątów trójkąta PQR, a zatem przecinają się one w jednym punkcie.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC. Okręgi o środkach P, Q, R są dopisane do trójkąta i styczne odpowiednio do boków BC, CA, AB. Przez punkty P, Q, R poprowadzone są proste k, l, m, prostopadłe odpowiednio do prostych BC, CA, AB. Wykazać, że proste k, l, m przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X, Y, Z, D, E odpowiednie punkty styczności (patrz rysunek 21). Na mocy najmocniejszego twierdzenia geometrii, zachodzą równości $BX = BD$, $CX = CE$ oraz $AD = AE$, skąd wynika, iż

$$AB + BX = AC + CX.$$

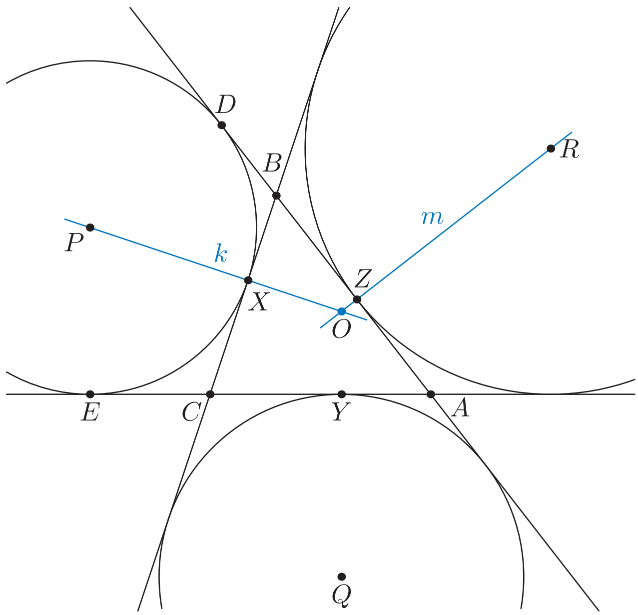
Analogicznie dostajemy $BC + BZ = AC + AZ$ i po odjęciu tej równości od poprzedniej otrzymujemy $AZ - CX = CX - AZ$, czyli odcinki AZ i CX są tej samej długości. Tak samo wykazujemy, iż $BX = AY$ oraz $CY = BZ$. Oznaczmy przez O punkt przecięcia prostych k i m.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, dostajemy

$$OC^2 - OB^2 = (OX^2 + CX^2) - (OX^2 + BX^2) = CX^2 - BX^2$$

oraz

$$OA^2 - OB^2 = (OZ^2 + AZ^2) - (OZ^2 + BZ^2) = AZ^2 - BZ^2.$$



Rysunek 21

Odejmując te równości stronami, otrzymujemy

$$OC^2 - OA^2 = BZ^2 - BX^2 = CY^2 - AY^2.$$

Udowodnimy teraz, że proste OY i AC są prostopadłe. Oznaczając przez W rzut prostokątny punktu O na prostą AC, mamy

$$CY^2 - AY^2 = OC^2 - OA^2 = (OW^2 + CW^2) - (OW^2 + AW^2) = CW^2 - AW^2. \tag{11}$$

Wykażemy, że z tej równości wynika $Y = W$.

Zauważmy, że Y leży na odcinku AC, więc

$$CY^2 - AY^2 = (CY - AY)(CY + AY) = (CY - AY)AC = (AC - 2AY)AC.$$

Rozważmy trzy możliwe położenia punktu W względem odcinka AC:

1. Jeżeli W również leży na odcinku AC (być może na jego końcu) to, podobnie jak powyżej, zachodzi równość $CW^2 - AW^2 = (AC - 2AW)AC$. Wówczas na mocy (11) otrzymujemy

   $$(AC - 2AY)AC = (AC - 2AW)AC,$$

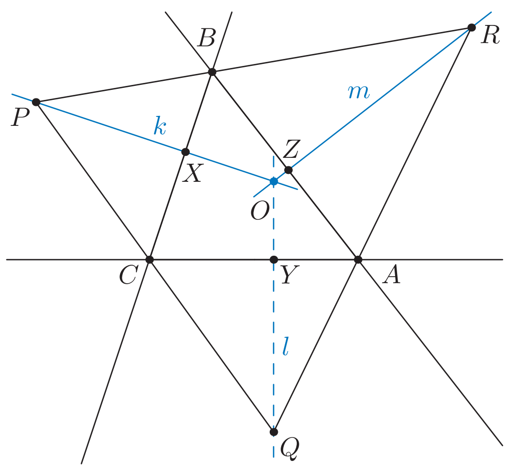
   czyli $AY = AW$. Biorąc pod uwagę położenie punktu W uzyskujemy stąd wniosek, że $Y = W$.

2. Jeżeli W leży na półprostej $\overrightarrow{CA}$ poza odcinkiem AC, to $CW^2-AW^2=(CW-AW)(CW+AW)=AC(CW+AW)>AC^2>(AC-2AY)AC=CY^2-AY^2$. To daje sprzeczność z równością (11).
3. Analogicznie, jeżeli W leży na półprostej $\overrightarrow{AC}$ poza odcinkiem AC, to $AW^2-CW^2>AY^2-CY^2$ i ponownie otrzymujemy sprzeczność z równością (11).

Wykazaliśmy, że $Y=W$. Wobec tego punkt O należy do prostej l, co kończy dowód.

Co tu jest ukryte?

Ponieważ punkty P, Q to środki odpowiednich okręgów dopisanych, półproste $CP^{\rightarrow}$ oraz $CQ^{\rightarrow}$ to dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołku C (patrz rysunek 22). W szczególności, wynika stąd, że punkty P, C oraz Q leżą na jednej prostej. Analogicznie, punkty Q, A, R są współliniowe oraz punkty R, B, P są współliniowe.



Rysunek 22

Zauważmy następnie, iż

$$\sphericalangle XPC = 90^\circ - \sphericalangle XCP = 90^\circ - \sphericalangle YCQ = \sphericalangle CQY$$

oraz, analogicznie, $\sphericalangle YQA = \sphericalangle ARZ$, $\sphericalangle ZRB = \sphericalangle BPX$. Skoro tak, to zachodzi równość $180^\circ = 2\sphericalangle PQR + 2\sphericalangle XPR$. Oznaczając przez O punkt przecięcia prostych k i m, mamy

$$\sphericalangle POR = 180^\circ - 2\sphericalangle OPR = (2\sphericalangle PQR + 2\sphericalangle XPR) - 2\sphericalangle OPR = 2\sphericalangle PQR,$$

Nietrudno sprawdzić, że punkty O i Q leżą po tej samej stronie prostej PR oraz $OP=OR$. Wynika stąd, że O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR. Zastępując parę k, m parą k, l i powtarzając rozumowanie, dostajemy wniosek, iż punkt przecięcia tych prostych także jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR. Stąd teza.

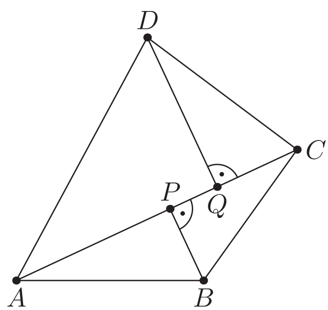
Zadanie 3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą następujące równości: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF i FAB poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Tak jak w zadaniu 1, skorzystamy z pewnej obserwacji.

Lemat. *W czworokącie wypukłym przekątne przecinają się pod kątem prostym wtedy i tylko wtedy, gdy sumy kwadratów naprzeciwległych boków są równe.*

Dowód lematu. Oznaczmy wierzchołki czworokąta literami A, B, C oraz D. Niech P, Q będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B i D na prostą AC (patrz rysunek 23).



Rysunek 23

Na mocy twierdzenia Pitagorasa, zachodzą równości

$$AB^2 - CB^2 = AP^2 - CP^2 \quad \text{oraz} \quad AD^2 - CD^2 = AQ^2 - CQ^2.$$

Wobec tego warunek $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ jest równoważny równości $AP^2 - CP^2 = AQ^2 - CQ^2$. Argumentując jak w zadaniu 2, stwierdzamy, że równość ta zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P = Q$, czyli gdy przekątne są prostopadłe. □

Przejdźmy do rozwiązania zadania.

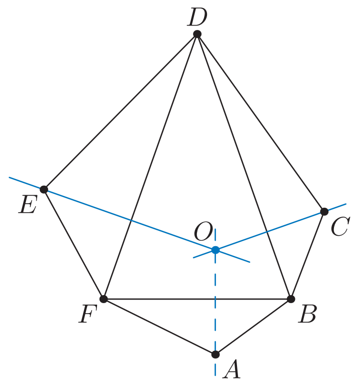
Niech O oznacza punkt przecięcia wysokości trójkątów BCD oraz DEF, poprowadzonych z wierzchołków C oraz E, odpowiednio (patrz rysunek 24).

Wówczas w czworokątach wypukłych $BCDO$ oraz $DEFO$ przekątne przecinają się pod kątem prostym, a zatem na mocy lematu

$$BC^2 + OD^2 = OB^2 + CD^2 \quad \text{oraz} \quad EF^2 + OD^2 = OF^2 + DE^2.$$

Odejmując te równania stronami i korzystając z równości $CD = DE$, dostajemy $BC^2 - EF^2 = OB^2 - OF^2$. Ponieważ $AB = BC$ i $EF = FA$, równość tę możemy równoważnie zapisać w postaci

$$AB^2+OF^2=OB^2+FA^2.$$



Rysunek 24

Stosując ponownie lemat, widzimy, iż przekątne czworokąta $ABOF$ są prostopadłe; jest to równoważne temu, iż wysokość trójkąta ABF, poprowadzona z wierzchołka A, przechodzi przez punkt O. Innymi słowy, wykazaliśmy, iż punkt O jest punktem przecięcia wysokości, o których mowa w treści zadania.

Co tu jest ukryte?

W tym zadaniu można dostrzec pewien aspekt geometrii przestrzennej, przynajmniej dla niektórych konfiguracji punktów A, B, C, D, E i F. Mianowicie, dzięki równościom zakładanym w treści, możemy potraktować sześciokąt jako siatkę ostrosłupa o podstawie BDF i wierzchołku G (który w siatce „rozpada” się na punkty A, C oraz E). Gwoli ścisłości, ta interpretacja jest możliwa, jeśli sześciokąt rzeczywiście jest siatką pewnego ostrosłupa, co nie zawsze zachodzi (muszą być spełnione pewne nierówności kątów, patrz zadanie 4 z tekstu *O pewnym podejściu do zadań z geometrii przestrzennej*). Jeśli ma to miejsce, wówczas widać, iż szukany punkt O jest niczym innym, jak spodkiem wysokości ostrosłupa opuszczonej z punktu G na podstawę BDF.

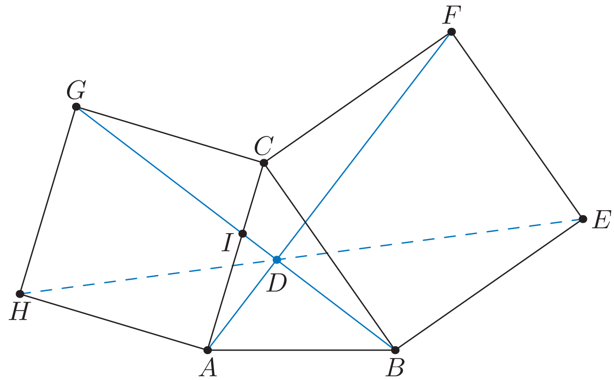
Zadanie 4. Na bokach BC i AC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BCFE$ oraz $ACGH$. Udowodnić, że proste AF, BG i EH przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Zacznijmy od spostrzeżenia, iż trójkąty ACF oraz GCB są przystające, co natychmiast wynika z zależności $AC=GC, CF=CB$ oraz równości kątów $\sphericalangle GCB=90^\circ+\sphericalangle ACB=\sphericalangle ACF$.

Oznaczmy przez D punkt przecięcia prostych AF i BG, zaś przez I punkt przecięcia prostych BG i AC (patrz rysunek 25). Proste AF oraz BG przecinają się pod kątem prostym: istotnie obliczamy, iż

$$\sphericalangle ADG = 180^\circ - \sphericalangle DAC - \sphericalangle AID = 180^\circ - \sphericalangle BGC - \sphericalangle CIG = \sphericalangle ACG.$$



Rysunek 25

Wobec tego, na czworokątach $HADG$ oraz $EFDB$ można opisać okręgi, a zatem

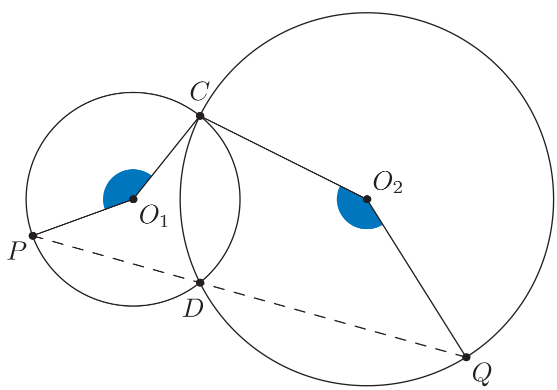
$$\sphericalangle ADH = \sphericalangle AGH = 45^\circ, \qquad \sphericalangle EDF = \sphericalangle EBF = 45^\circ.$$

Tak więc punkty H, D oraz E są współliniowe, skąd natychmiast wynika teza zadania.

Co tu jest ukryte?

W gruncie rzeczy, zadanie bazuje na następującym fakcie.

Lemat. *Okręgi $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ o środkach O_1, O_2 przecinają się w punktach C i D. Załóżmy, że punkty $P \in \mathcal{O}_1$, $Q \in \mathcal{O}_2$ spełniają warunek $\sphericalangle PO_1C = \sphericalangle QO_2C$, przy czym trójkąty PO_1C oraz QO_2C mają tę samą orientację. Wówczas punkty P, D oraz Q są współliniowe.*



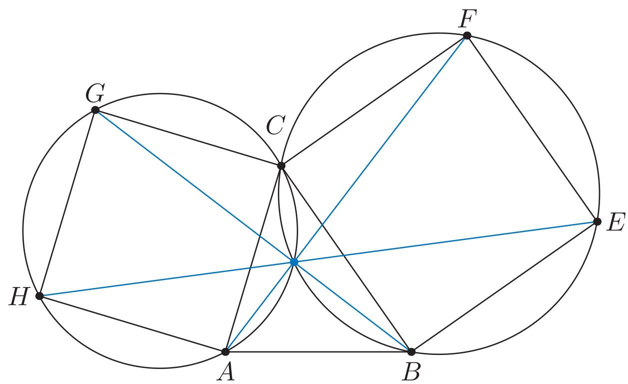
Rysunek 26

Dowód lematu. Dowód przeprowadzimy tylko w przypadku, gdy P leży poza kołem ograniczonym przez $\mathcal{O}_2$ oraz Q leży poza kołem ograniczonym przez $\mathcal{O}_1$ (patrz rysunek 26); w pozostałych przypadkach łatwo odpowiednio zmodyfikować rozumowanie. Korzystając z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, bezpośrednio wyliczamy, iż

$$\sphericalangle PDC = \alpha/2 \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle QDC = 180^\circ - \alpha/2,$$

gdzie α to miara kąta PO_1C, zaznaczonego na rysunku. Stąd natychmiast wynika teza lematu. □

Wróćmy do rozważanego zadania. Niech $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ będą okręgami opisanymi na kwadratach $ACGH$, $BEFC$, odpowiednio (patrz rysunek 27).



Rysunek 27

Jeśli te okręgi są styczne, to trójki punktów A, C, F oraz B, C, G są współliniowe i szukanym punktem przecięcia jest punkt C. W przeciwnym razie, okręgi przecinają się w dwóch różnych punktach C, D. Wystarczy teraz (trzykrotnie) skorzystać z lematu, by stwierdzić, iż każda z prostych AF, BG oraz EH przechodzi przez punkt D.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 5.

Na bokach BC i CA trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D i E takie, że $CD/DB = CE/EA$. Wykazać, że proste AD, BE oraz środkowa opuszczona z punktu C przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 6.

Na ramionach BC i DA trapezu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty E i F takie, że

$$\frac{BE}{EC} = 2 = \frac{AF}{FD}.$$

Wykazać, że proste AE, BF oraz prosta łącząca środki podstaw AB i CD przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 7.

Na przyprostokątnych BC i CA trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BEFC$ oraz $CGHA$. Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC. Wykazać, że proste AE, BH oraz CD przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 8.

Sześciokąt wypukły $ABCDEF$ spełnia następujące warunki: $BD = CE$, $DF = EA$, $FB = AC$. Wykazać, że symetralne boków BC, DE, FA przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 9.

Na bokach BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne BDC, CEA oraz AFB. Dowieść, że proste AD, BE oraz CF przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 10.

Z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu $\mathcal{O}$ o środku S poprowadzono dwie proste, styczne do $\mathcal{O}$ w punktach D i E, oraz prostą przecinającą $\mathcal{O}$ w punktach A i B. Niech C będzie punktem symetrycznym do B względem prostej PS. Dowieść, że proste PS, DE oraz AC przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 11.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a punkty K, L, M, N są środkami jego boków AB, BC, CD, DA. Proste k, ℓ, m, n przechodzą odpowiednio przez punkty K, L, M, N i są prostopadłe odpowiednio do prostych CD, DA, AB, BC. Wykazać, że proste k, ℓ, m, n przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówki i szkice rozwiązań

Strategie wygrywające w grach

6. Odpowiedź: ogólniej, dla n początkowych zapałek Bolek przegrywa, jeżeli n jest podzielne przez 4. Przeanalizuj przykład 1.

7. Odpowiedź: ogólniej, dla n początkowych zapałek Bolek przegrywa, jeżeli n daje resztę 0 lub 1 lub 2 lub 3 z dzielenia przez 10. W szczególności niestety przegra on dla $n=100$. Strategią Lolka jest tutaj branie $10-k$ zapałek, jeżeli Bolek zabrał k.

8. Odpowiedź: ogólniej, dla n początkowych zapałek Bolek przegrywa, jeżeli n daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Przeanalizuj przykład 1 i przemyśl następujące rozumowanie: 1 zapałka jest pozycją przegrywającą (gracz musi ją wziąć), więc 2, 3, 4 zapałki to pozycje wygrywające, tak więc 5 zapałek to pozycja przegrywająca itd.

9. Należy „od końca”, tj. zaczynając od pól sąsiadujących z $H8$ wyznaczyć, które pozycje są wygrywające, a które przegrywające. Okazuje się, że przegrywające pola to pola odległe od $H8$ o parzystą liczbę kolumn i jednocześnie o parzystą liczbę wierszy, np. $F6$, $D2$. W szczególności pole $A1$ jest wygrywające. Zaczynając, Bolek powinien przejść na pole $B2$.

10. Bolek wygrywa. Zauważ, że po ruchu Lolka odległość pomiędzy pionkami (tzn. liczba pustych pól pomiędzy nimi) jest nieparzysta, więc Bolek zawsze może przesunąć swój pionek w prawo.

Liczby pierwsze, liczby wymierne i niewymierne

12. Niech

$$m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c\,,$$
$$n = 2^d \cdot 3^e \cdot 5^f\,,$$

gdzie a, b, c, d, e, f są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Wówczas dana w zadaniu równość przyjmuje postać

$$2^{3a+4d} \cdot 3^{3b+4e} \cdot 5^{3c+4f} = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^{13}\,,$$

co jest spełnione, o ile

$$\begin{cases} 3a+4d=11 \\ 3b+4e=9 \\ 3c+4f=13. \end{cases}$$

Nietrudno sprawdzić, że powyższe równości są prawdziwe dla układu liczb całkowitych nieujemnych $a=1$, $b=3$, $c=3$, $d=2$, $e=0$, $f=1$, co tłumaczy się na

$$m = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 6750,$$
$$n = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 20.$$

13. Z równości $2^8 \cdot 18^{10} = 2^{18} \cdot 3^{20} = \mathbf{3} \cdot 2^{18} \cdot 3^{19}$ oraz $6^{19} = 2^{19} \cdot 3^{19} = \mathbf{2} \cdot 2^{18} \cdot 3^{19}$ otrzymujemy $2^8 \cdot 18^{10} > 6^{19}$.

14. Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze:

$$12^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}, \quad 18^{18} = 2^{18} \cdot 3^{36},$$

co daje

$$\mathrm{NWW}(12^{12}, 18^{18}) = 2^{\max(24,18)} \cdot 3^{\max(12,36)} = 2^{24} \cdot 3^{36}.$$

15. Przeliczamy, że

$$\mathrm{NWD}(a,b,c) = 2^{\min(4,6,10)} \cdot 3^{\min(7,11,3)} \cdot 5^{\min(9,5,0)} \cdot 7^{\min(0,0,2)} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 2^4 \cdot 3^3,$$

$$\mathrm{NWW}(a,b,c) = 2^{\max(4,6,10)} \cdot 3^{\max(7,11,3)} \cdot 5^{\max(9,5,0)} \cdot 7^{\max(0,0,2)} = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^9 \cdot 7^2.$$

16. Aby móc postąpić jak w poprzednim zadaniu, musimy najpierw zapisać rozkłady liczb a, b, c na czynniki pierwsze:

$$a = 2^{13} \cdot 3^{16}, \quad b = 2^{16} \cdot 3^{11}, \quad c = 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^2.$$

Dopiero teraz możemy podać NWD i NWW liczb a, b, c:

$$\mathrm{NWD}(a,b,c) = 2^{\min(13,16,12)} \cdot 3^{\min(16,11,3)} \cdot 5^{\min(0,0,2)} = 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 2^{12} \cdot 3^3,$$

$$\mathrm{NWW}(a,b,c) = 2^{\max(13,16,12)} \cdot 3^{\max(16,11,3)} \cdot 5^{\max(0,0,2)} = 2^{16} \cdot 3^{16} \cdot 5^2.$$

17. Wobec równości

$$n^2 - 1 = (n-1) \cdot (n+1)$$

oraz nierówności $n+1 > 1$, podana liczba jest pierwsza tylko wtedy, gdy $n-1 = 1$ oraz liczba $n+1$ jest pierwsza.

Odpowiedź: $n = 2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania; $n^2 - 1 = 3$.

18. Dla $p = 2$ otrzymujemy liczbę pierwszą $3p+1 = 7$.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą różną od 2, to liczba $3p+1$ jest parzysta i większa od 2, a więc jest złożona.

Odpowiedź: $p = 2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

19. Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu liczb, otrzymujemy

$$2^{m+2n} \cdot 3^{m+n} = 2^k \cdot 3^{2k},$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach:

$$m + 2n = k \quad \text{oraz} \quad m + n = 2k.$$

Odejmując stronami powyższe równania, otrzymujemy

$$n = -k,$$

co nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Odpowiedź: Nie istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające podane równanie.

20. Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu liczb, otrzymujemy

$$2^{m+3n} \cdot 3^{2m+n} = 2^{2k} \cdot 3^k,$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach:

$$m + 3n = 2k \quad \text{oraz} \quad 2m + n = k.$$

Odejmując stronami od potrojonego równania drugiego równanie pierwsze, otrzymujemy

$$5m = k\,,$$

co po wstawieniu do drugiego równania daje $2m+n=5m$, skąd

$$n = 3m\,.$$

Przyjmując $m=1$, otrzymujemy $n=3$ oraz $k=5$. Jak łatwo sprawdzić, liczby te spełniają warunki zadania.

Odpowiedź: Liczby naturalne m, n, k spełniające podane równanie istnieją, np. $(m,n,k)=(1,3,5)$.

21. Dla $m=1, n=7$ iloczyn $mn=7$ jest podzielny przez 7, a jedynymi dzielnikami co najmniej jednej z liczb 1, 7 są liczby 1 oraz 7. Zatem jedynymi kandydatami na liczby d spełniające warunki zadania są 1 i 7.

Liczba $d=1$ spełnia warunki zadania w oczywisty sposób.

Z kolei liczba 7 jest pierwsza, a zatem jest ona dzielnikiem iloczynu wtedy i tylko wtedy, gdy jest dzielnikiem co najmniej jednego z czynników. Tak więc dla dowolnych liczb naturalnych m, n podzielność iloczynu mn przez 7 pociąga za sobą podzielność przez 7 co najmniej jednej z liczb m, n, skąd wynika, że $d=7$ również spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Liczbami spełniającymi warunki zadania są 1 i 7.

22. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}, \quad 2^{m/n} = 3, \quad 2^m = 3^n\,.$$

Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest wymierna.

23. Nie, np. dla liczb $a=c=\sqrt{2}$, $b=d=-\sqrt{2}$ mamy $a+b=b+c=c+d=d+a=0$.

24. Tak, mamy bowiem

$$a = \frac{(a+b)-(b+c)+(c+d)-(d+e)+(e+a)}{2}$$

i podobnie dla liczb b, c, d, e.

Ekstremalny element, czyli o tym, co naj...

9. Jako A wybierzmy gracza, który wygrał największą liczbę meczów. Jeżeli nie wygrał on wszystkich, rozważmy dowolnego innego gracza B, który wygrał z A. Gdyby B wygrał również ze wszystkimi zawodnikami, z którymi wygrał A, to B miałby więcej wygranych meczów niż A.

10. Idea rozwiązania jest podobna jak w zadaniu 3. Warto rozważyć podział (A,B) o tej własności, że łączna liczba rozegranych partii, w których jeden z zawodników pochodzi z A, a drugi z B, jest maksymalna.

11. Można uogólnić rozumowanie prezentowane w rozwiązaniu zadania 1.

12. Można wybrać ucznia A, który posiada największą liczbę znajomych w jednej ustalonej szkole, do której nie chodzi; bez straty ogólności przyjmijmy, że chodzi on do pierwszej szkoły, a największą liczbę znajomych k z jednej, nie swojej szkoły, posiada w szkole drugiej. Z założeń wynika, że A posiada znajomego również w trzeciej szkole; oznaczmy go przez B. Gdyby B nie znał żadnego spośród k znajomych A z drugiej szkoły, to w drugiej szkole miałby co najwyżej $n-k$ znajomych, więc w pierwszej musiałby mieć co najmniej $k+1$ znajomych, co przeczyłoby określeniu k. Dlatego w drugiej szkole istnieje wspólny znajomy C uczniów B i A, który razem z nimi tworzy szukaną trójkę.

13. Osobę nazwiemy *zapracowaną*, jeżeli należy do co najmniej dwóch komisji. W przeciwnym razie nazwiemy ją *leniwą*. Oznaczmy przez p liczbę osób zapracowanych.

Oznaczmy przez S_1 sumę liczb członków wszystkich komisji, zaś przez S_2 sumę liczb zapracowanych członków wszystkich komisji. Skoro jest sześć komisji i każda z nich ma co najmniej $n/4$ członków, to $S_1 \geqslant 6n/4$. Z drugiej strony, każda osoba leniwa jest policzona w S_1 co najwyżej jednokrotnie (być może istnieją osoby niepracujące w żadnej komisji), więc $n-p+S_2 \geqslant S_1$, stąd $S_2-p \geqslant n/2$.

Dla każdych dwóch komisji rozważmy liczbę wspólnych członków i zsumujmy tak otrzymane liczby, uzyskując S_3. Wybierzmy dowolną osobę zapracowaną i załóżmy, że należy ona do $j \geqslant 2$ komisji. Wtedy w różnicy S_2-p jest ona policzona $j-1$ razy, zaś w sumie S_3 jest ona policzona $\frac{j(j-1)}{2}$ razy. Skoro $j \geqslant 2$, to $\frac{j(j-1)}{2} \geqslant j-1$, więc w sumie S_3 osoba ta jest policzona co najmniej tyle razy, ile w różnicy S_2-p. Wobec tego $S_3 \geqslant S_2-p$.

Jest 15 par komisji, zatem istnieje para, która ma co najmniej $S_3/15$ wspólnych członków. Skoro

$$\frac{S_3}{15} \geqslant \frac{S_2-p}{15} \geqslant \frac{n}{30},$$

to ta para komisji ma co najmniej $n/30$ wspólnych członków, co kończy dowód.

14. Umieśćmy gdziekolwiek na torze samochód, który od początku ma wystarczająco wiele paliwa, aby przejechać tor i wystarczająco duży bak, aby po drodze gromadzić paliwo z mijanych stacji. Przejedźmy tym samochodem cały tor, po drodze zbierając paliwo. Rozpatrzmy moment, w którym nasz samochód ma najmniejszą ilość paliwa w baku na całej trasie. Na pewno jest to moment, w którym samochód jest tankowany na jednej ze stacji. Chwila namysłu pozwala stwierdzić, że zaczynając od tej stacji i mając pusty bak, nasz samochód również przejedzie cały tor (ilość paliwa w baku cały czas będzie nie mniejsza od 0, przy czym 0 może być tylko w momencie dojeżdżania do dyspozytora).

15. Rozpatrzmy dowolny wielościan wypukły; niech π będzie jego ścianą o największej liczbie krawędzi m. Rozważmy m ścian, które sąsiadują z π; liczba krawędzi każdej z nich może być równa $3,4,\ldots,m$. Jest m ścian i $m-2$ możliwości, dlatego pewne dwie ściany mają tyle samo krawędzi.

16. Na początku warto wykazać, że suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest większa niż suma długości dowolnej pary jego przeciwległych boków, co jest prostym wnioskiem z nierówności trójkąta.

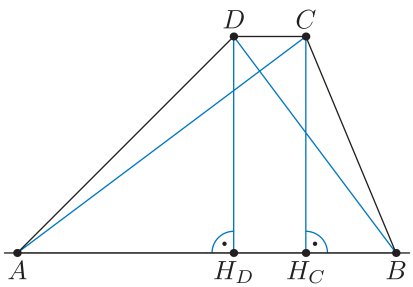
Rozważmy wszystkie możliwe *sparowania*, tzn. sposoby poprowadzenia n odcinków o różnokolorowych końcach łączących n zielonych punktów z n różowymi. Spośród wszystkich możliwych sparowań wybierzmy takie, dla którego suma długości odcinków jest najmniejsza. Gdyby w tym sparowaniu którekolwiek dwa odcinki przecinały się — powiedzmy Z_1R_1 z Z_2R_2 — to zgodnie z początkową obserwacją, łącząc Z_1 z R_2 i Z_2 z R_1 i pozostawiając resztę bez zmian otrzymalibyśmy sparowanie o mniejszej sumie długości odcinków.

O tym, czego zrobić się nie da

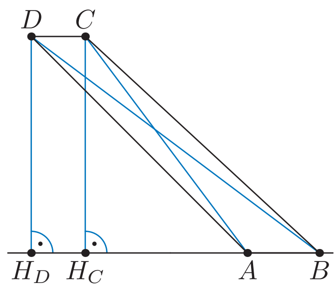
8. Sprytnym sposobem na uzyskanie wyniku (bez uzasadnienia) jest rozumowanie: *jeżeli zadanie ma sens, to odpowiedź jest taka sama dla wszystkich promieni kuli.* Dla kuli o promieniu 3 cm walec jest odcinkiem, więc pozostała część kuli ma objętość 36π cm^3. Patrz też `deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/stereometria/2011/01/01/Kula_i_dziura/`

9. Wbrew pozorom zadanie nie jest błędne. Bok, którego długością jest szerokość powstałego prostokąta nie musi być obrazem boku, którego długością była szerokość wyjściowego prostokąta. Odpowiedź: o 20%.

10. Oznaczmy wierzchołki trapezu przez A, B, C, D, gdzie AC i BD są przekątnymi o długościach $AC = 15$, $BD = 20$. Oznaczmy przez H_C, H_D spodki wysokości opuszczonych z punktów C, D na prostą AB. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy $AH_C = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ oraz $BH_D = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$.



Rysunek 28



Rysunek 29

Można sprawdzić, że albo zachodzi $AB+CD=AH_C+BH_D=25$, albo $AB+CD=BH_D-AH_C=7$, w zależności od kolejności punktów A, B, H_C, H_D na prostej, patrz rysunek 28 oraz rysunek 29 (możliwe są także inne układy punktów A, B, H_C, H_D na prostej, jednakże dla nich również $AB+CD=25$ lub $AB+CD=7$).

Ostatecznie pole trapezu wynosi 150 lub 42.

11. Nie istnieje ostrosłup spełniający warunki zadania. Dlaczego? Najważniejszym składnikiem dowodu jest odpowiednik nierówności trójkąta dla kątów trójściennych, która głosi, że dla dowolnego czworościanu $XYZS$ zachodzi nierówność

$$\sphericalangle XSZ < \sphericalangle XSY + \sphericalangle YSZ.$$

Stosując to spostrzeżenie dwukrotnie, otrzymujemy

$$\sphericalangle DSA = \sphericalangle ASD < \sphericalangle ASC + \sphericalangle CSD < \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSD.$$

Ale z warunków zadania wynika, że lewa strona nierówności jest równa $8\sphericalangle ASB$, a prawa jest równa $7\sphericalangle ASB$. Wobec tego $\sphericalangle ASB < 0$, sprzeczność.

12. Po pewnym czasie na planecie nie pozostanie żaden ufoludek. Aby to zobaczyć, zastanówmy się, co by było, gdyby na planecie był tylko jeden ufoludek zielonooki. A gdyby było dwóch (jak szybko każdy z nich zorientowałby się, że kolega nie jest jedynym zielonookim)?

13. Przemyśl rozwiązanie zadania 7. Tutaj danych punktów jest o jeden mniej, więc warto koło podzielić tak, by któryś z punktów należał do dwóch części, czyli leżał na krawędzi łączącej je.

14. Jeżeli któryś pirat ląduje za burtą, to schemat powtarza się, z mniejszą liczbą piratów, warto więc analizować przypadki kolejno.

Jeżeli chcesz sprawdzić odpowiedź, wiedz, że gdyby było sześciu piratów, o sile $1, 2, 3, 4, 5, 6$, to najsilniejszy zarobiłby 98 dukatów, a piraci 2 i 4 po jednym, oraz że gdyby piratów było 203, to pierwszy proponujący zostałby wyrzucony za burtę.

Zadanie opisano na stronie `http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/gry_zagadki_paradoksy/2011/04/20/Piraci/`

Metoda przepchnięć

5. Najmniejsza wartość CM jest osiągana dla trójkąta równoramiennego. Warto pomyśleć o możliwych punktach C jako leżących na okręgu o środku w pewnym punkcie O i zastosować nierówność trójkąta do trójkąta CMO.

6. Wykazać, że przy przesunięciu punktu S do innego punktu leżącego wewnątrz sześciokąta $ABCDEF$, suma pól trójkątów ABS, CDS i EFS nie zmieni się. W tym celu warto dowieść następującego faktu: jeżeli S leży wewnątrz trójkąta równobocznego XYZ, to suma odległości S od boków tego trójkąta jest równa długości wysokości w trójkącie XYZ, w szczególności nie zależy od wyboru S.

7. Można tę nierówność wywnioskować wprost z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, podstawiając za a_i liczby b_i^{-1}.

8. Wystarczy udowodnić tę nierówność dla liczb nieujemnych (dlaczego?). Warto zacząć od pozbycia się pierwiastka. Prostsze i pouczające jest ułożenie i rozwiązanie odpowiedniego zadania dla dwóch, a nie trzech liczb.

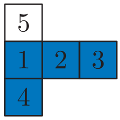
9. Wystarczy udowodnić tę nierówność dla liczb nieujemnych (dlaczego?). Warto na początek skupić się na przypadku $n=3$, porównaj z zadaniem 8, lub $n=4$. Ogólne rozumowanie jest podobne.

10. We wszystkich zadaniach lewa strona nierówności jest równa prawej wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zmienne mają równe wartości. Rozumowanie jest podobne jak w zadaniu 3.

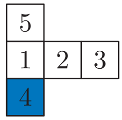
W kierunku odpowiedniej hipotezy

8. Żądaną pozycję możemy otrzymać dla n niepodzielnych przez 3.

Załóżmy najpierw, że n jest niepodzielne przez 3. Gdy $n = 2$, łatwo pokazać odpowiedni ciąg ruchów. Rozważmy rysunek 30, na którym pole niezamalowane jest puste, a na polach kolorowych stoją piony. Kolejno: zdejmujemy piony z pól 1 i 4 i stawiamy pion na polu 5, zdejmujemy piony z 2 i 3 i stawiamy pion na polu 1, zdejmujemy piony z 1 i 5 i stawiamy pion na polu 4. W ten sposób znajdujemy się w sytuacji z rysunku 31.



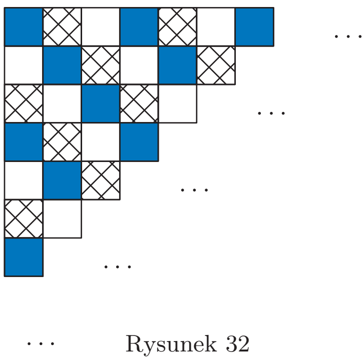
Rysunek 30



Rysunek 31

Stosując powyższy trik możemy usuwać trójki pionów z boków kwadratu. Przykładowo, z kwadratu 4×4 można tym sposobem uzyskać kwadrat 2×2, zaś z kwadratu 5×5 można uzyskać kwadrat 1×1. Podobnie dla innych n niepodzielnych przez 3 można otrzymywać coraz mniejsze kwadraty z pionów i wreszcie kwadrat 1×1, czyli jeden pion. Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie szczegółów.

Dla n podzielnych przez 3 pomalujmy szachownicę, używając trzech kolorów, w następujący sposób:



Rysunek 32

Warto zauważyć, że ruch zmienia resztę z dzielenia przez 2 liczby pionków na polu każdego koloru na rysunku 32. Wobec tego w każdym momencie gry te reszty są równe, więc dla n podzielnych przez 3 nie możemy dojść do pozycji z jednym pionem.

9. Warto rozważyć trzynastokąt foremny wpisany w okrąg. Przeanalizujmy wierzchołki tego trzynastokąta. Wśród nich jest co najmniej pięć punktów pomalowanych na ten sam kolor (załóżmy, że jest to kolor biały). Jeżeli każde dwa sąsiednie boki pięciokąta utworzonego z tych punktów mają różne długości, to istnieją dwa sąsiednie punkty białe...

10. Spróbować najpierw rozwiązać zadanie z liczbami mniejszymi niż 25 oraz 100.

11. Załóżmy, że taka liczba n istnieje. Niech p będzie jej najmniejszym dzielnikiem pierwszym. Wówczas liczby n i $p-1$ są względnie pierwsze. Z założenia zachodzi $2^n \equiv 1 \pmod{p}$. Na mocy małego twierdzenia Fermata zachodzi również $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Z tych dwóch kongruencji wywnioskujemy, że $2^1 \equiv 1 \pmod{p}$, czyli sprzeczność.

Na mocy algorytmu Euklidesa, dla dowolnych względnie pierwszych liczb naturalnych x i y istnieją takie liczby całkowite a i b, że $ax+by=1$. Stosując ten fakt do liczb $x=n$ i $y=p-1$ znajdujemy takie a i b, że $an+b(p-1)=1$. Załóżmy, że $b<0$. Wtedy $a\geqslant 0$ i $an=|b|(p-1)+1$, stąd

$$1\equiv 2^{an}=2^{|b|(p-1)+1}=\left(2^{p-1}\right)^{|b|}\cdot 2\equiv 2 \pmod{p},$$

co jest absurdem.

Identyczny przypadek $b\geqslant 0$ pozostawiamy Czytelnikowi.

12. Najpierw zgadnąć, kiedy w nierówności zachodzi równość. Następnie znaleźć takie liczby rzeczywiste s, t, by dla dowolnej liczby $x\geqslant 0$ zachodziło oszacowanie

$$\frac{x}{1+x}\leqslant sx+t$$

oraz by dla odpowiedniej wartości x była w nim równość.

Można także skorzystać z równości $\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$, a następnie z nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną.

13. Można założyć, że $a\geqslant b\geqslant c$, przenieść wszystkie składniki na lewą stronę nierówności i pogrupować:

$$(a^3+abc-a^2(b+c))+(b^3+abc-b^2(c+a))+(c^3+abc-c^2(a+b))\geqslant 0.$$

Następnie zwinąć każdy z nawiasów do iloczynu, otrzymując

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\geqslant 0.$$

Aby dokończyć rozwiązanie, wystarczy pokazać, że $|a(a-b)(a-c)|\geqslant|b(b-a)(b-c)|$ oraz $c(c-a)(c-b)\geqslant 0$.

Geometryczne puzzle

6. Rozpatrzmy kwadrat $PQRS$ o boku 1 i weźmy taki punkt X leżący na boku RS, że $RX=BC$. Z cechy przystawania bok-kąt-bok wnioskujemy, że trójkąty XRQ i BCD są przystające, podobnie trójkąty PSX i DEA. Z cechy bok-bok-bok wnioskujemy natomiast, że trójkąty PQX i ABD są przystające. Stąd pole rozważanego pięciokąta wynosi 1.

7. Obróćmy trójkąt ABP o kąt 90° wokół punktu A, otrzymując trójkąt ADP'. Niech α oznacza miarę kąta PAQ. Wtedy $\sphericalangle DAQ=90^\circ-2\alpha$, stąd

$$\sphericalangle P'AQ=\alpha+(90^\circ-2\alpha)=90^\circ-\alpha=\sphericalangle APB=\sphericalangle AP'Q.$$

Wnioskujemy, że trójkąt AQP' jest równoramienny, zatem

$$BP+DQ=DP'+DQ=P'Q=AQ.$$

8. Warto znaleźć taką łamaną $XYZTX'$, że $XY=AB$, $YZ=BC$, $ZT=CD$, $TX'=DA$ oraz $XX'=2\sqrt{2}$. Czworokąt $ABCD$ wycina z kwadratu cztery narożne trójkąty prostokątne; powyższą łamaną można uzyskać, ustawiając je w odpowiedni sposób, tak aby wszystkie przyprostokątne były poziome lub pionowe.

9. Podobnie jak w zadaniu 2, obróćmy czworokąt $NMCD$ wokół punktu M o 180°. Uzyskujemy wówczas czworokąt $N'MBD'$. Zauważmy, że czworokąt $AD'N'N$

jest równoległobokiem. Stąd $AB+CD=AB+BD'\geqslant AD'=NN'=2MN$, czego należało dowieść. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt B leży na prostej AD', co jest równoważne temu, że $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD.

10. Obróćmy punkt C wokół punktu M o kąt prosty tak, by otrzymany punkt C' leżał po innej stronie prostej BC niż A. Wtedy $\sphericalangle AMC'=90^\circ+\sphericalangle CMA=\sphericalangle AMB$, więc skoro $MB=MC'$, to na mocy cechy przystawania bok-kąt-bok, trójkąt AMB przystaje do trójkąta AMC'. Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$AD\leqslant AC'+C'D\leqslant AC'+C'C+CD=AB+\frac{BC}{\sqrt{2}}+CD.$$

Pozostaje pokazać, że nierówność jest ostra. Jeżeli tak nie jest, to punkty A, C', C, D leżą na pewnej prostej w tej kolejności, w szczególności $\sphericalangle ACD=180^\circ$, co jest sprzeczne z wypukłością czworokąta $ABCD$.

11. Opisane w treści zadania proste tną kwadrat na cztery przystające trójkąty, cztery przystające trapezy oraz mały kwadrat w środku. Każdy z czterech trójkątów można złączyć z dowolnym trapezem tak, aby otrzymać kwadrat przystający do środkowego. Oznacza to, że pole środkowego kwadratu wynosi 1/5 pola całego kwadratu.

O pewnym podejściu do zadań z geometrii przestrzennej

5. *Sposób 1.* Rozważyć punkty K, L, M, N, powstałe przez przecięcie krawędzi AB, CD, BC, AD płaszczyznami CDP, ABP, ADP i BCP odpowiednio. Następnie wykazać, że K, L, M, N leżą w jednej płaszczyźnie.

Sposób 2. Zrzutować czworościan na płaszczyznę w ten sposób, że otrzymany rzut $A'B'C'D'$ jest czworokątem wypukłym, zawierającym w swoim wnętrzu rzut P' punktu P. Wtedy suma miar kątów $\sphericalangle A'P'B'$, $\sphericalangle B'P'C'$, $\sphericalangle C'P'D'$, $\sphericalangle D'P'A'$ jest równa 360°.

6. Wykazać najpierw, że badane cztery punkty leżą na sferze. Następnie wystarczy udowodnić, iż te punkty leżą na jednej płaszczyźnie. W tym celu oznaczmy przez ℓ_C prostą przechodzącą przez punkty styczności do AC i BC, zaś przez ℓ_D prostą przechodzącą przez punkty styczności do AD i BD. Pokazać, że trzy proste: AB, ℓ_C i ℓ_D mają punkt wspólny lub są równoległe.

7. Wybór punktów spełniających własność z zadania jest możliwy, niezależnie od wartości n. Niech O będzie środkiem podstawy $A_1A_2\ldots A_n$. Zauważyć, że zachodzi nierówność

$$\sphericalangle A_1SA_2<\frac{180^\circ}{n}. \tag{12}$$

By dowieść jej prawdziwości, założyć przeciwnie, że $\sphericalangle A_1SA_2\geqslant\frac{180^\circ}{n}$. Wykazać, że istnieje taki punkt S' wewnątrz okręgu opisanego na $A_1\ldots A_n$, że trójkąty $A_1S'A_2$ i A_1SA_2 są przystające. Dla tak ustalonego punktu S' zachodzi nierówność

$$SA_1=S'A_1<S'O+OA_1\leqslant 2OA_1.$$

Z drugiej strony, z założenia $\sphericalangle OA_1S=60^\circ$ wynika, że $SA_1=2OA_1$. Uzyskana sprzeczność dowodzi równości (12).

Rozważyć siatkę powierzchni bocznej ostrosłupa (rozcinając wzdłuż krawędzi A_1S) i oznaczyć przez A_1, A_1' obrazy punktu A_1 na tej siatce. Z nierówności (12) oraz faktu, że dany ostrosłup jest prawidłowy, wywnioskować, że otrzymany $(n+2)$-kąt $SA_1A_2\ldots A_nA_1'$ jest wypukły. Wobec tego przekątna A_1A_1' ma długość mniejszą niż $A_1S+SA_1'=2A_1S$ i przecina odcinki $A_2S, A_3S, \ldots, A_nS$. Oznaczając punkty przecięcia odpowiednio przez $B_2, B_3, \ldots, B_n$, otrzymujemy szukaną łamaną $A_1B_2B_3\ldots B_nA_1'$ o długości $A_1A_1' < 2A_1S$.

8. Rozważyć symetrię względem płaszczyzny π przechodzącej przez AB i prostopadłej do CD. Symetria ta posyła punkt C na taki punkt C', że $\sphericalangle AC'B = \sphericalangle ACB$. Pokazać, że $C' = D$.

9. Rozważyć wypukły czworokąt (płaski) $AD'BC$ taki, że trójkąty $AD'B$ oraz ADB są przystające. Pozostaje wykazać, że proste AB i CD' są prostopadłe.

Oznaczmy przez H_C i H_D odpowiednio rzuty C i D' na prostą AB. Nietrudno sprawdzić, że rzuty te leżą na odcinku AB. Wobec tego wystarczy pokazać równość $AH_C = AH_D$. Niech O oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABD', zaś E oznacza rzut punktu A na prostą OB. Można wykazać, że $\sphericalangle ABE = 50°$, więc $\sphericalangle BAE = 40°$ i trójkąt ABE jest podobny do trójkąta ACH_C. Skoro $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ to $AB = AC$ i wymienione trójkąty są przystające. Zatem $AE = AH_C$.

Pozostaje pokazać $AE = AH_D$. Skoro $\sphericalangle H_DAD' = 60°$, to $AH_D = \frac{1}{2}AD'$. Oznaczmy przez M środek odcinka AD'. Dowieść, że trójkąty AMO i AEO są podobne na mocy cechy kąt-kąt-kąt. Mają one wspólny bok AO, więc są przystające. Stąd $AE = AM = \frac{1}{2}AD' = AH_D$.

Zobaczyć to, czego nie widać: o zadaniach geometrycznych

5. Zauważyć najpierw, że $DE \parallel AB$. Oznaczyć przez M punkt przecięcia prostych AD i BE, a przez ℓ prostą równoległą do AB przechodzącą przez punkt M. Wystarczy pokazać, że punkt M jest środkiem odcinka KL wycinanego przez ℓ z trójkąta ABC. Użyć twierdzenia Talesa do par odcinków KM i DE oraz LM i DE.

Uwaga: Rozwiązanie jest także natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia Cevy zastosowanego do odcinków AD, BE i środkowej CF.

Twierdzenie Cevy. *Niech ABC będzie trójkątem, a punkty D, E, F leżą odpowiednio we wnętrzach boków BC, CA, AB. Wtedy proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

6. Skorzystać z poprzedniego zadania.

7. Przedłużmy proste EF oraz GH do przecięcia w punkcie I. Wówczas proste AE, BH oraz CD zawierają wysokości trójkąta ABI.

8. Trójkąt BDF powstaje przez obrót trójkąta CEA wokół pewnego punktu O.

9. Okręgi opisane na dobudowanych trójkątach równobocznych przecinają się w jednym punkcie.

10. Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych PS i DE. Wykazać, że zachodzi równość $SX \cdot PS = r^2$, gdzie r jest promieniem okręgu $\mathcal{O}$; następnie wykorzystując podobieństwo odpowiednich trójkątów, dowieść, że $\sphericalangle AXS = \sphericalangle PAS$ oraz $\sphericalangle CXS = \sphericalangle PBS$.

11. Oznaczmy przez O środek okręgu. Warto najpierw dowieść, że teza zadania zachodzi, jeśli w definicji prostych k, ℓ, m, n zamienimy odcinki CD, DA, AB i BC na AB, BC, CD oraz DA, odpowiednio. Następnie, zauważamy że odcinki KM oraz LN przecinają się w punkcie S będącym środkiem obu tych odcinków. Szukany w zadaniu punkt to taki punkt P, że S jest środkiem odcinka PO.

Spis treści

I Artykuły 3

Strategie wygrywające w grach . . . 3
Liczby pierwsze, liczby wymierne i niewymierne . . . 8
Ekstremalny element, czyli o tym, co naj... . . . 15
O tym, czego zrobić się nie da . . . 22
Metoda przepchnięć . . . 27
W kierunku odpowiedniej hipotezy . . . 33
Geometryczne puzzle . . . 40
O pewnym podejściu do zadań z geometrii przestrzennej . . . 45
Zobaczyć to, czego nie widać: o zadaniach geometrycznych . . . 51

II Wskazówki i szkice rozwiązań 60

Strategie wygrywające w grach . . . 60
Liczby pierwsze, liczby wymierne i niewymierne . . . 60
Ekstremalny element, czyli o tym, co naj... . . . 62
O tym, czego zrobić się nie da . . . 64
Metoda przepchnięć . . . 65
W kierunku odpowiedniej hipotezy . . . 65
Geometryczne puzzle . . . 67
O pewnym podejściu do zadań z geometrii przestrzennej . . . 68
Zobaczyć to, czego nie widać: o zadaniach geometrycznych . . . 69