

# Środek przeciwprostokątnej

Waldemar Pompe

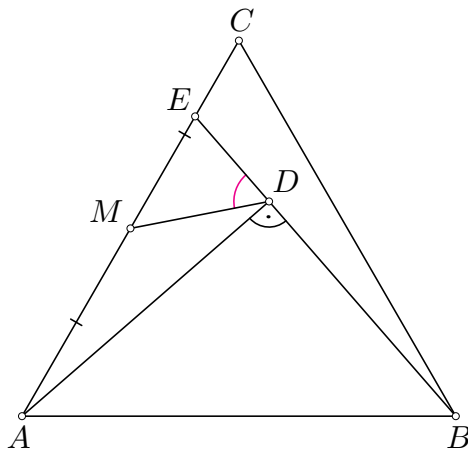
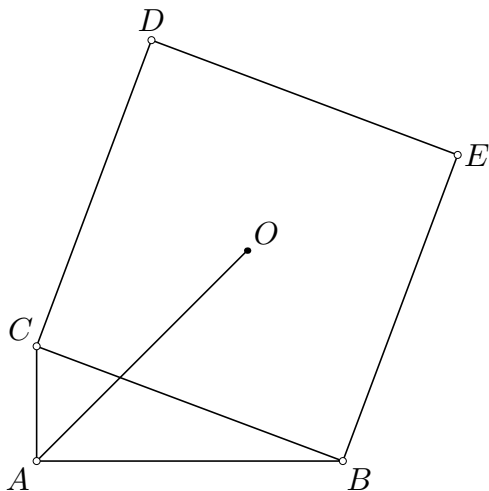
Na kółku OMJ

Zdalne seminarium olimpijskie dla nauczycieli matematyki szkół podstawowych

Zoom, 8 i 9 maja 2020 r.

**Zadanie 1.**

Na przeciwprostokątnej  $BC$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  zbudowano (po zewnętrznej stronie) kwadrat  $BCDE$ . Niech  $O$  będzie środkiem tego kwadratu. Wykazać, że  $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO$ .

**Zadanie 2.**

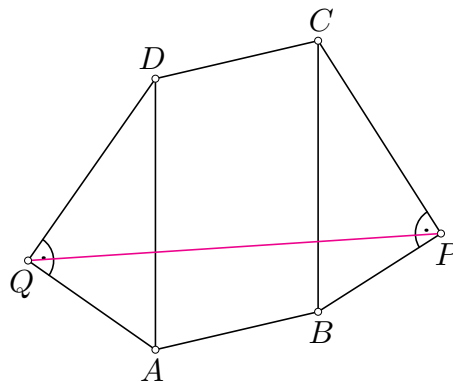
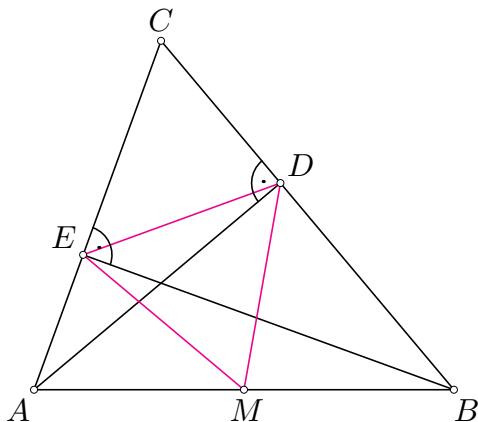
Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AC$  trójkąta równobocznego  $ABC$ . Punkt  $E$  leży na odcinku  $CM$ . Punkt  $D$  jest spodkiem wysokości trójkąta  $ABE$  poprowadzonej do boku  $BE$ . Oblicz miarę kąta  $EDM$ .

**Zadanie 3.**

Wykaż, że każdy trójkąt można rozciąć na trójkąty równoramienne.

**Zadanie 4.**

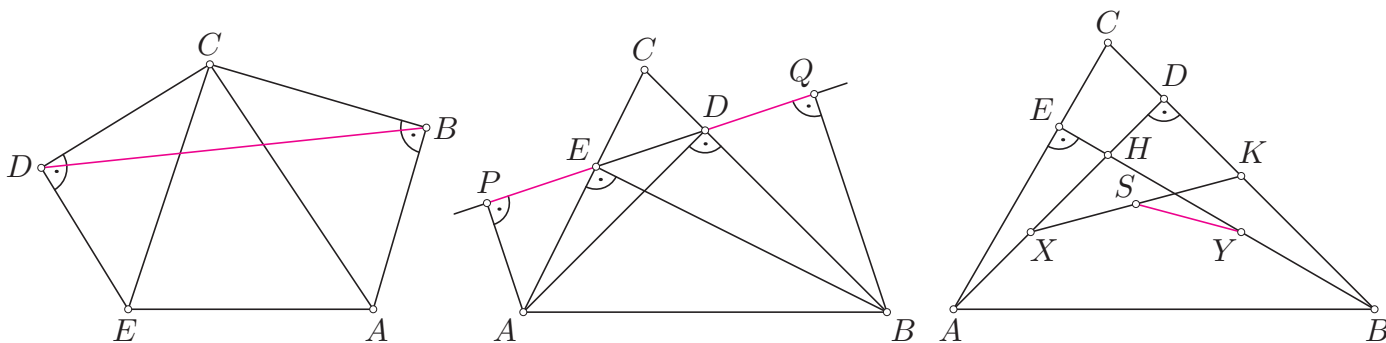
Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ , przy czym  $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ . Punkty  $D$  i  $E$  są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów  $A$  i  $B$  na proste  $BC$  i  $AC$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AB$ . Wykaż, że trójkąt  $DEM$  jest równoboczny.

**Zadanie 5.**

Dany jest równoległobok  $ABCD$ . Na bokach  $BC$  i  $DA$  tego równoległoboku, po zewnętrznej stronie, zbudowano takie trójkąty  $BCP$  i  $DAQ$ , że  $\sphericalangle BPC = \sphericalangle DQA = 90^\circ$ . Wykaż, że  $PQ \leq AB + BC$ .

**Zadanie 6.** (zawody I stopnia VII OMG)

W pięciokącie wypukłym  $ABCDE$  kąty przy wierzchołkach  $B$  i  $D$  są proste. Wykaż, że obwód trójkąta  $ACE$  jest nie mniejszy od  $2 \cdot BD$ .

**Zadanie 7.**

Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ . Punkty  $D$  i  $E$  są rzutami prostokątnymi punktów  $A$  i  $B$  odpowiednio na proste  $BC$  i  $CA$ . Punkty  $P$  i  $Q$  są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów  $A$  i  $B$  na prostą  $DE$ . Udowodnij, że  $PE = DQ$ .

**Zadanie 8.**

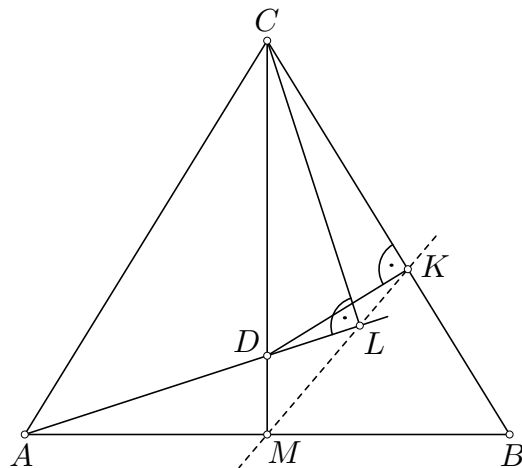
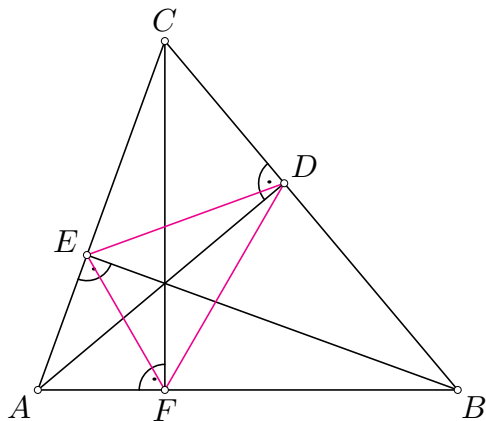
Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ . Punkty  $D$  i  $E$  są rzutami prostokątnymi punktów  $A$  i  $B$  odpowiednio na proste  $BC$  i  $CA$ . Odcinki  $AD$  i  $BE$  przecinają się w punkcie  $H$ . Punkty  $K, X, Y$  są odpowiednio środkami odcinków  $BC, AH, BH$ . Punkt  $S$  jest środkiem odcinka  $XK$ . Udowodnij, że  $SY = \frac{1}{2}XK$ .

**Zadanie 9.**

W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  punkty  $D, E, F$  są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków  $A, B, C$ .

(a) Wykaż, że  $DA, EB, FC$  są dwusiecznymi kątów trójkąta  $DEF$ .

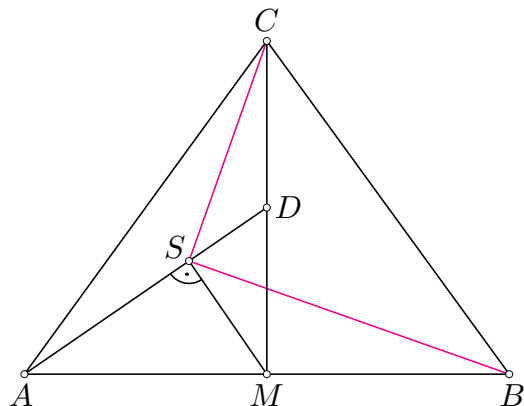
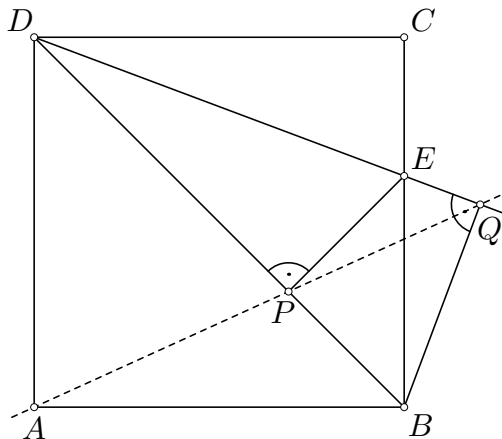
(b) Wiedząc, że miary kątów trójkąta  $ABC$  przy wierzchołkach  $A, B, C$  są równe odpowiednio  $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ , wyznacz miary kątów trójkąta  $DEF$ .

**Zadanie 10.**

W trójkącie  $ABC$  spełniona jest równość  $AC = BC$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AB$ . Punkt  $D$  leży na odcinku  $CM$ . Niech  $K$  i  $L$  będą rzutami prostokątnymi punktu  $D$  i  $C$  odpowiednio na proste  $BC$  i  $AD$ . Wykaż, że punkty  $K, L, M$  leżą na jednej prostej.

**Zadanie 11.**

Punkt  $E$  leży na boku  $BC$  kwadratu  $ABCD$ . Punkty  $P$  i  $Q$  są rzutami prostokątnymi z punktu  $E$  i  $B$  odpowiednio na  $BD$  i  $DE$ . Wykaż, że punkty  $A, P, Q$  leżą na jednej prostej.

**Zadanie 12.**

Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $AC = BC$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AB$ , a punkt  $D$  środkiem boku  $CM$ . Punkt  $S$  jest rzutem prostokątnym punktu  $M$  na prostą  $AD$ . Udowodnij, że proste  $BS$  i  $CS$  są prostopadłe.