

Szkolne twierdzenie

- **Twierdzenie Pitagorasa**

Jeżeli trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym, w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, to prawdziwa jest równość

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

- **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa**

Jeżeli w trójkącie ABC zachodzi równość $AC^2 + BC^2 = AB^2$, to trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym oraz $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

1. Wykazać, że jeśli w czworokącie wypukłym przekątne są prostopadłe, to sumy kwadratów jego przeciwległych boków są równe.

2. W trójkącie prostokątnym ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Znaleźć długość boku AC tego trójkąta, jeśli $CD = 3$ i $BD = 5$.

3. (XIV OMJ, I) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 45^\circ \quad \text{oraz} \quad DA = 3, \quad AB = 7\sqrt{2}, \quad BC = 4.$$

Oblicz długość boku CD .

4. (PD V LO, BB) Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB > BC > AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na bok AB . Wykazać, że dla każdego punktu leżącego na odcinku CD ($C \neq X \neq D$) prawdziwa jest równość

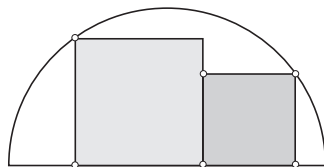
$$AC^2 + BX^2 = AX^2 + BC^2.$$

5. [SKM] Dany jest taki trapez $ABCD$, że proste AD i BC są prostopadłe. Wykazać, że

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2.$$

6. (I OMG, I) W czworokącie wypukłym przekątne są prostopadłe oraz sumy długości przeciwległych jego boków są równe. Wykazać, że jedna z jego przekątnych dzieli drugą na połowy.

7. (PD V LO, BB) W półkole koła o promieniu $r = 5$ wpisano dwa kwadraty, jak na rysunku poniżej. Obliczyć sumę pól tych kwadratów.



8. (PD V LO, BB) W okręgu o promieniu R poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy AB i CD . Wykazać, że zachodzi równość

$$AC^2 + BD^2 = 4R^2.$$

9. Wewnątrz prostokąta $ABCD$ istnieje taki punkt P , że: $PA=3$, $PB=4$, $PC=5$. Wyznaczyć PD .

10. Dane są okręgi o promieniach r i R styczne zewnętrznie, które są styczne do prostej ℓ w dwóch różnych punktach A i B . Obliczyć długość odcinka AB .

11. Dane są okręgi o promieniach r i R styczne zewnętrznie, które są styczne do prostej ℓ w dwóch różnych punktach. Wyznaczyć promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej ℓ .

12. Punkt P jest punktem wewnętrznym trójkąta ostrokątnego ABC . Punkty P_1, P_2, P_3 leżą poza tym trójkątem tak, że spełnione są warunki:

$$PP_1 \perp AB, \quad PP_2 \perp BC, \quad PP_3 \perp AC \quad \text{i} \quad BP_1 = BP_2, \quad CP_2 = CP_3.$$

wykazać, że $AP_1 = AP_3$.

13. Dany jest tak czworokąt wypukły $ABCD$, że proste AD i BC są prostopadłe. Wykazać, że zachodzi równość

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2.$$

14. (PD V LO, BB) Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC . Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, AC, AB . Wykazać, że

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = BF^2 + CD^2 + AE^2.$$

15. Punkt P jest takim punktem wewnętrznym kwadratu $ABCD$, że $AP:BP:CP=1:2:3$. Wyznaczyć miarę kąta APB .

16. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AB = AC = 5$. Na jego boku BC wybrano dowolnie punkty P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Przyjmijmy:

$$m_i = AP_i^2 + BP_i \cdot CP_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Wyznaczyć sumę $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$.

17. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano takie różne punkty P_1, P_2, P_3, P_4 , że

$$AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B.$$

Wykazać, że

$$CP_1^2 + CP_2^2 + CP_3^2 + CP_4^2 = AP_1^2 + AP_2^2 + AP_3^2 + AP_4^2.$$

Literatura

[1] Łukasz Drwiega, Tomasz Szymczyk, *444 konkursowe zadania z matematyki dla gimnazjalistów*. Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2013

[2] Xu Jiagu, *Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses. For Junior Section Vol. 1*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2010

[3] Ivan Kokan, Peter Bakić, *Mathematical Competitions in Croatia*. Croatian Mathematical Society, Zagreb 2018

<https://www.omj.edu.pl/zadania>



Ministerstwo
Edukacji Narodowej



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów finansowana jest
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej