Zdalne seminarium OMJ
dla nauczycieli matematyki
Platforma Zoom — wrzesień 2021 r.
Tomasz Szymczyk

Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

Trzy odcinki

1. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC wybrano dowolnie punkt D. Punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D na boki odpowiednio AB i AC. Wykazać, że suma $DM+DN$ jest wielkością stałą dla tego trójkąta.

2. Dany jest trójkąt równoramienny ABC ($AB=AC$). Na jego boku BC wybrano dowolnie punkt D. Punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D na boki odpowiednio AB i AC. Wykazać, że suma $DM+DN$ jest wielkością stałą dla tego trójkąta. Co to za wielkość?

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Na przedłużeniu podstawy AB poza punkt B wybrano punkt X. Punkty M i N są rzutami prostokątnym punktu X na proste odpowiednio AC i BC, a punkt D jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AC. Wykazać, że $XM=XN+BD$.

4. W trójkącie prostokątnym ABC ($\sphericalangle ACB=90°$) poprowadzono wysokość CD. Wyznaczyć kąty ostre tego trójkąta, jeżeli $AC+AD=BD$.

5. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio takie punkty E i F, że $AD=BE+BF$. Wykazać, że

$$\sphericalangle BAF+\sphericalangle EDF+\sphericalangle BCE=90°.$$

6. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Przez środek I okręgu wpisanego w ten trójkąt poprowadzono proste k, m, n równoległe odpowiednio do boków AB, BC, AC. Prosta k przecina boki AC i BC w punktach odpowiednio K_1 i K_2, prosta m przecina boki AB i AC w punktach odpowiednio M_1 i M_2, a prosta n przecina boki AB i BC w punktach odpowiednio N_1 i N_2, Wykazać, że $M_1N_1=K_1M_2+K_2N_2$.

7. Dane są kwadraty $ABCD$ i $CEFG$, których jedynym punktem wspólnym jest punkt C oraz ich przekątne zawierają się w prostej AF. Punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktów odpowiednio A i F na prostą BE. Wykazać, że $BE=AM+FN$.

8. W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A i B mają miary 40°. Dwusieczna kąta ABC przecina odcinek AC w punkcie D. Wykazać, że $BD+CD=AB$.

9. Na bokach AB i AC trójkąta ABC znaleźć takie punkty odpowiednio M i N, aby odcinek MN był równoległy do boku BC oraz $BM+CN=MN$.

10. Na bokach AB i AC trójkąta ABC znaleźć takie punkty odpowiednio M i N, aby odcinek MN był równoległy do boku BC oraz $BM+CN=BC$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

11. Prosta m przechodzi przez środek ciężkości G trójkąta ABC, w którym $AB < AC$, oraz przecina jego boki AB i AC. Punkty P, Q, R są rzutami prostokątnymi na prostą m punktów odpowiednio A, B, C. Wykazać, że $AP = BQ + CR$.

12. W okrąg ω wpisano trójkąt równoboczny ABC. Na łuku BC okręgu ω, który nie zawiera punktu A, wybrano dowolnie punkt D. Wykazać, że $AD = BD + CD$.

13. Na trójkącie ABC, w którym $AB < AC$, opisano okrąg ω. Symetralna odcinka BC przecina w punkcie D ten łuk BC okręgu ω, do którego należy punkt A. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na bok AC. Wykazać, że $CE = AB + AE$.

14. Czworokąt $ABCD$, w którym $BC = CD$, jest wpisany w okrąg. Na jego bokach AB i AD wybrano odpowiednio takie punkty F i N, że $\sphericalangle FCN = \frac{1}{2}\sphericalangle BCD$. Wykazać, że

$$FN = BF + DN.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki